

Maple A-Niveau

**Copyright © Maplesoft
2026**

Indhold

1 De trigonometriske funktioner	1
1.1 Grafer for sin, cos og tan	1
1.2 Trigonometrisk ligninger	3
Eksempel 1	3
Eksempel 1 - symbolsk løsning	4
Eksempel 2	4
Eksempel 2 - symbolsk løsning	5
Eksempel 3	6
1.3 Den harmoniske svingning	7
Eksempel	8
2 Integralregning	11
2.1 Stamfunktion	11
Navngivning af stamfunktionen	11
Eksempel 1	12
Eksempel 2	12
2.2 Areal under en graf	14
Eksempel 1	15
2.3 Areal af et område begrænset af to grafer	16
Eksempel 1	16
Eksempel 2	17
Eksempel 3	18
2.4 Omdrejningslegemer	20
Eksempel 1	22
Eksempel 2	23
2.5 Kurvelængde	27
Eksempel 1	27
Eksempel 2 - Golden Gate	28
3 Differentialligninger	29
3.1 Eksakt løsning af differentialligninger	29
3.2 Interactive Solver	30
3.3 Eksempler af typen $y' = a \cdot y$	32
Eksempel 1	32
Eksempel 2	33
Eksempel 3	33
3.4 Eksempler af typen $y' = b - a \cdot y$	34
Eksempel 1	34
Eksempel 2	34
3.5 Eksempler - andre typer	35
Eksempel 1	35
Eksempel 2	35
3.6 Eksempler af typen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$	36
Eksempel 1	36
Eksempel 2	37
3.7 Linjeelementer og løsningskurver	38
Eksempel 1	41
Eksempel 2	41
Eksempel 3	44
Eksempel 4	45
Eksempel 5: Logistisk vækst med jagt/fiskeri	46
3.8 Differentielligningsmodeller	50
En rygtespredningsmodel	50
En rov- byttedyr model	54
En epidemi model	56
4 Vektorregning	57
4.1 Gym-pakken	57

4.2 Indtastning af vektorer	57
4.3 Regning med vektorer	59
cirkulær reference – læs kun, hvis du ikke bruger pile over vektorerne	60
4.4 Punkter og stedvektorer	61
4.5 Længden af en vektor	62
4.6 Polære koordinater	62
4.7 Enhedsvektor	63
4.8 Skalarprodukt	63
Eksempel – ortogonale vektorer	64
4.9 Vinkel mellem to vektorer	65
4.10 Projektion af vektor på vektor	65
4.11 Tværvektor	66
4.12 Determinant	67
Eksempel: Brug af determinant	67
4.13 Areal	68
Eksempel: Brug af arealT	68
4.14 Brug af kontekstmenuen	69
5 Analytisk geometri i 2D	72
5.1 Parameterfremstilling for en ret linje	72
Eksempel	73
5.2 Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger	74
5.3 Linjens ligning	75
Eksempel	77
5.4 Skæring mellem to linjer givet ved ligninger	77
5.5 Afstand fra punkt til linje	78
Linjen givet ved en ligning	78
Linjen givet ved en parameterfremstilling	79
5.6 Afstand mellem to parallelle linjer	81
Linjerne er givet ved ligninger	81
Linjerne er givet ved parameterfremstillinger	81
5.7 Cirkels ligning	82
5.8 Tegning af en cirkel	83
implicitplot	85
5.9 Skæring mellem linje og cirkel	87
Tegning med implicitplot	88
6 Vektorer i 3D	90
6.1 Vektorregning i 3D	90
Eksempel 1	90
6.2 Krydsproduktet	92
6.3 Teoretiske overvejelser vedr. krydsproduktet	92
6.4 Beviser med Maple	93
7 Analytisk geometri i 3D	95
7.1 Parameterfremstilling for en ret linje i rummet	95
Beskrivelse, eksempel og plot	95
Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger	96
Afstand fra punkt til linje	97
Afstand mellem to parallelle linjer	98
Afstand mellem to vindskæve linjer	99
7.2 Planens ligning	102
Beskrivelse, eksempel og plot	102
En plans skæring med koordinataksene	104
Planens ligning ud fra 3 punkter i planen	105
Planens ligning ud fra ét punkt og to ikke-parallele vektorer	106
Skæring mellem to planer (givet ved ligninger)	107
Vinkel mellem to planer	108
Skæring mellem plan (givet ved en ligning) og linje	109
Vinkel mellem linje og plan	109
Afstand fra punkt til plan	110

Afstand mellem to parallelle planer	111
Projektion af et punkt på en plan	112
7.3 Planens parameterfremstilling	113
Beskrivelse, eksempel og plot	113
Planens parameterfremstilling ud fra 3 punkter i planen	114
Skæring mellem to planer givet ved parameterfremstillinger	114
7.4 Kuglens ligning	116
Beskrivelse, eksempel og plot	116
Skæring mellem kugle og linje	118
Skæring mellem kugle og plan	119
8 Normalfordelingen	123
8.1 Data	123
8.2 Gruppering af data	123
8.3 Deskriptorer	125
8.4 Frekvensfunktionen for normalfordelingen	126
8.5 Normalfordelingsfunktionen	132
8.6 Normalfordelingen i Gym-pakken	134
Eksempel 1	135
8.7 Tjek for normalfordelte data	137
8.8 Regressionsanalyse	139
8.9 Konfidensintervaller for a og b i en lineær regression	142
9 Vektorfunktioner	145
9.1 Parameterfremstilling for en ret linje	145
9.2 Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger	147
9.3 Vektorfunktioner - mere generelt	149
9.4 Skæring med akserne	152
Eksempel 1	153
9.5 Eliminering af parameteren	154
Eksempel 1	155
9.6 Differentiation af en vektorfunktion	156
9.7 Tangent til banekurven	157
Eksempel 1	157
Eksempel 2 (med brug af tangent-kommandoen i Gym-pakken)	158
Eksempel 3 (tegning af flere tangenter)	159
9.8 Vandrette og lodrette tangenter	160
Eksempel 1	161
9.9 Dobbelpunkter	163
Eksempel 1	164
9.10 Vinklen mellem to passager af et dobbelpunkt	166
9.11 Parameterfremstilling for en cirkel	167
Eksempel 1	168
Eksempel 2	168
9.12 Hastighed og acceleration	169
Eksempel 1	170
9.13 Areal af et område begrænset af en banekurve	172
9.14 Kurvelængde	175
10 Funtioner af to variable	177
10.1 Forskrift og graf	177
10.2 Lodrette og vandrette snit	178
Eksempel 1	180
10.3 Niveaukurver	181
Eksempel 1	182
10.4 Partielle afledte og tangentplan	184
Eksempel 1	184
Eksempel 2	185
Eksempel 3	186
Eksempel 4	186
10.5 Gradienten	187

Eksempel 1	188
10.6 Stationære punkter	189
10.7 Arten af stationære punkter	190
Eksempel 1	192
Eksempel 2 - med Gym-pakken	194
11 Chi2-Test	196
11.1 Inden du begynder	196
Virkeligheden – den virkelige verden	196
Modellen – den idealiserede verden	197
Sandsynlighedsfordelingen (tæthedsfunktionen)	198
Fordelingsfunktionen	199
Oversigt over begreber i model og virkelighed	200
Sådan fungerer det i Gym-pakken	200
Sådan fungerer det med stokastiske variable (Avanceret)	202
Chi2 - fordelingen	204
11.2 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 1 (p2-7)	205
Eksempel 1	205
Automatisk test for uafhængighed	209
11.3 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 2 (p7-11)	210
Flere niveauer på hvert af inddelingskriterierne	210
Automatisk test for uafhængighed	213
11.4 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 3 (p10)	214
Test for uafhængighed mellem overlevelse og operationsform for aldersgruppen over 50	214
Automatisk test for uafhængighed	217
11.5 Test for Goodness of Fit (p12-14)	218
Test for Goodness of Fit	218
Automatisk test for Goodness of Fit	220
12 Chi2 Uafhængighedstest – Simulation	221
12.1 Intro	221
12.2 Mediemonitor	221
Simulation af nulhypotesen	222
Værktøj til blanding	224
Løsning med Gym-pakken	227
12.3 Salg af kartofler	228
Løsning med Gym-pakken	231
12.4 Spørgeskema	232
Løsning med Gym-pakken	233
12.5 Chi2Sim	234
12.6 Frihedsgrader	234
13 Chi2 test for Goodness of Fit – Simulation	236
13.1 Intro	236
13.2 Simulation af nulhypotesen	236
13.3 Simulation af et enkelt terningkast	238
13.4 Gentagne kast med en terning	239
13.5 Modellen	243
13.6 Frihedsgrader	245
13.7 Farvefordeling i M&M's poser	247
13.8 Krydsning af tomatplanter	250
13.9 Chi2-fordelingen	252
13.10 Chi2-test for Goodness of Fit – opskrift	254
13.11 Chi2-test for Goodness of Fit med Gym-pakken	257
Eksempel 1 (Terningkast)	257
Eksempel 2 (M&M's)	258
Eksempel 3 (Krydsning af tomatplanter)	259
Eksempel 4 (Krydsning af blomster)	260

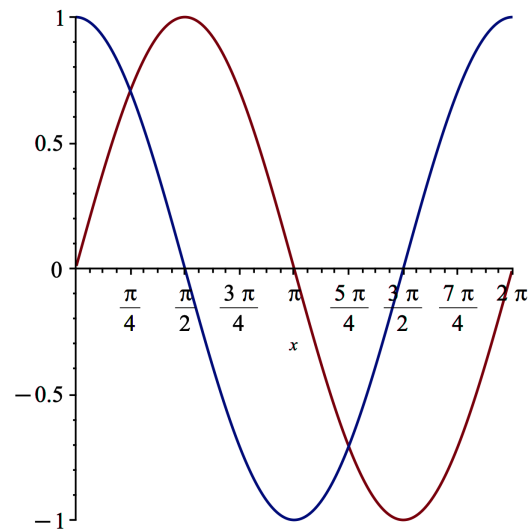
1 De trigonometriske funktioner

1.1 Grafer for sin, cos og tan

De trigonometriske funktioner er implementeret i Maple under navnene `sin`, `cos`, og `tan`. Bemærk, at funktionsnavnene her skal skrives med små begyndelsesbogstaver (i modsætning til når du laver trekantsberegning Gym-pakken).

Graferne for sinus og cosinus i periodeintervallet $[0, 2\pi]$ ser sådan ud

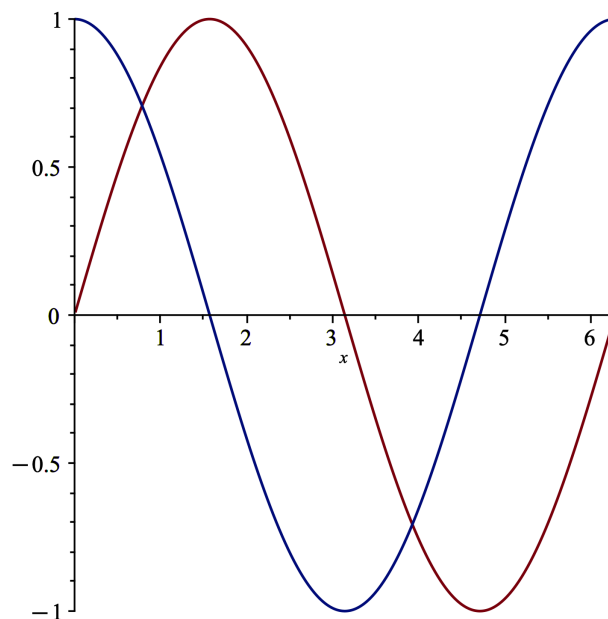
```
plot([sin(x), cos(x)], x = 0 .. 2 * pi, size = [300, 300])
```



Læg specielt mærke til, at langs x -aksen er der angivet aksemærker i multipla af π . Denne indstilling får du helt automatisk.

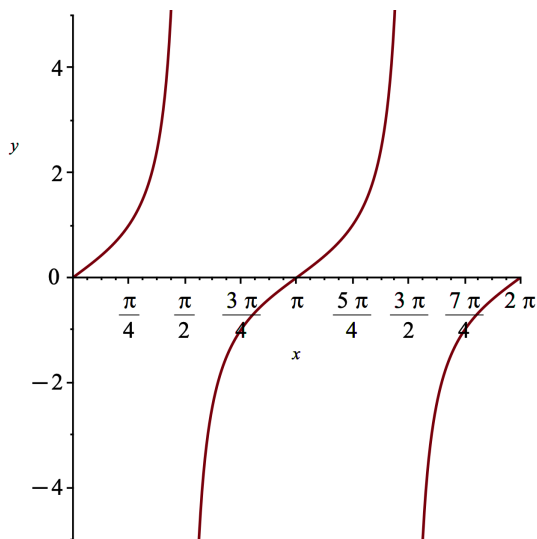
Du kan få en almindelig x -akse ved at erstatte 2π med decimaltilnærmelsen for 2π :

```
plot([sin(x), cos(x)], x = 0 .. 6.28, size = [350, 350])
```



Tegner du grafen for tangens i intervallet $[0, 2\pi]$ og begrænser y -intervallet, får du en graf som denne

`plot(tan(x), x = 0 .. 2 pi, y = -5 .. 5, size = [300, 300])`



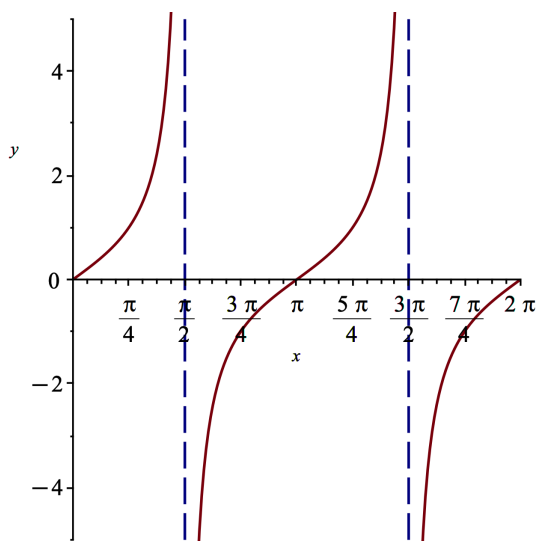
At grafen ikke hænger sammen er en følge af, at **tan** ikke er defineret i $\frac{\pi}{2}$ og i $\frac{3\pi}{2}$.

Ofte vil man se lodrette stiplede streger gennem disse punkter – kaldet asymptoter – og vil du have dem tegnet, er det nemmeste at skrive $x = \frac{\pi}{2}$ og trække denne ligning ind i plottet. Dette vil give grafen for en ubrudt linje med ligningen $x = \frac{\pi}{2}$. Tilsvarende

tegnes linjen med ligningen $x = \frac{3\pi}{2}$. Herefter kan linjerne så laves stiplede ved at klikke på linjerne én efter én og vælge **Line > Dash** i kontekstmenuen.

Hvis du vil have Maple til at tegne de stiplede linjer, bliver det en smule indviklet:

`with(plots) :`



1.2 Trigonometrisk ligninger

Hvis du insisterer på at løse trigonometriske ligninger eksakt, vil du let komme i problemer, da der ofte vil findes uendelig mange løsninger til ligningen. Ofte vil en grafisk løsning i kombination med en numerisk solver være at foretrække. Lad os se på et par eksempler:

Eksempel 1

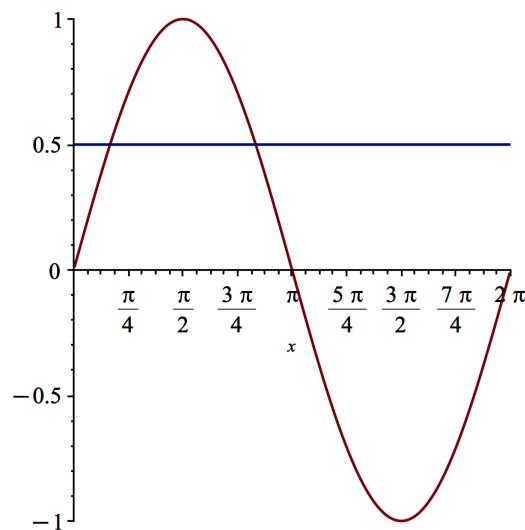
Løs ligningen $\sin(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2\pi]$

Ved brug af *solve* (symbolsk løsning), returnerer Maple blot en enkelt løsning:

$$\text{solve}\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x\right) \quad \frac{\pi}{6} \quad (1.1)$$

For at illustrere problemet grafisk tegner vi graferne for $\sin(x)$ og $\frac{1}{2}$ i samme koordinatsystem. Så fremgår det tydeligt, at solve-kommandoen kun finder den ene:

$$\text{plot}\left(\left[\sin(x), \frac{1}{2}\right], x = 0 .. 2\pi, \text{size} = [300, 300]\right)$$



Når du skal løse en trigonometrisk ligning i et interval, kan du benytte kommandoen *intervalsolve* fra Gym-pakken. Den vil umiddelbart give dig løsningerne:

with(Gym) :

$$\text{intervalsolve}\left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0 .. 2\pi\right) \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \quad (1.2)$$

Vil du have de numeriske løsninger, benytter du *fintervalsolve* :

$$\text{fintervalsolve} \left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x = 0 .. 2 \pi \right)$$

$$[0.5235987756, 2.617993878] \quad (1.3)$$

Eksempel 1 - symbolsk løsning

Naturligvis kan Maple's solve-kommando også give dig de symbolske løsninger:

Hvis du vil have samtlige løsninger returneret, skal du tilføje *AllSolutions* som parameter :

$$L := \text{solve} \left(\sin(x) = \frac{1}{2}, x, \text{AllSolutions} \right)$$

$$L := \frac{1}{6} \pi + 2 \pi _Z1\sim, \frac{5}{6} \pi + 2 \pi _Z1\sim \quad (1.4)$$

Resultatet skal forstås på den måde, at $_Z1\sim$ er et vilkårligt helt tal. Tegnet $\sim$ (tilde) efter $_Z1$ betyder, at Maple har gjort antagelser om $_Z1$ (hvis du genberegner skifter navnet til $_Z2$ – eller noget helt andet, men altid med $_Z$ efterfulgt af et helt tal).

Løsningerne i intervallet $[0, 2 \pi]$ finder du her ved at sætte $_Z1\sim = 0$.

Dette giver løsningerne $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5 \pi}{6}$.

Eksempel 2

Løs ligningen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2 \pi]$

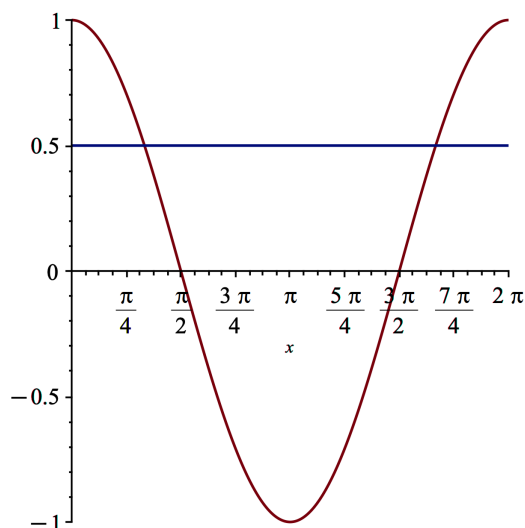
Ved brug af *solve* (symbolsk løsning), returnerer Maple blot en enkelt løsning:

$$\text{solve} \left(\cos(x) = \frac{1}{2}, x \right)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (1.5)$$

For at illustrere problemet grafisk tegner vi graferne for $\cos(x)$ og $\frac{1}{2}$ i samme koordinatsystem:

`plot([cos(x), 1/2], x = 0 .. 2 pi, size = [300, 300])`



Her vil `interval solve` fra Gym-pakken umiddelbart give dig de to løsninger:

`with(Gym) :`

`interval solve (cos(x) = 1/2, x = 0 .. 2 pi)`

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \quad (1.6)$$

og med numeriske løsninger

`finterval solve (cos(x) = 1/2, x = 0 .. 2 pi)`

$$[1.047197551, 5.235987756] \quad (1.7)$$

Eksempel 2 - symbolisk løsning

Løs ligningen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0, 2\pi]$

Vi finder samtlige løsninger:

`L := solve(cos(x) = 1/2, x, AllSolutions)`

$$L := \frac{1}{3}\pi + 2\pi_Z2\sim, -\frac{1}{3}\pi + 2\pi_Z2\sim \quad (1.8)$$

Løsningerne i intervallet $[0, 2\pi]$ finder du ved at sætte `_Z2 = 0`.

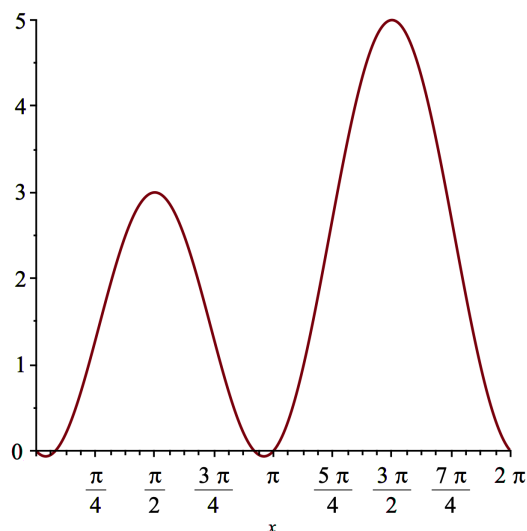
Dette giver løsningerne $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{5\pi}{3}$.

Eksempel 3

Løs ligningen $4 \cdot \sin^2(x) - \sin(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

Lad os først tage et kig på ligningen grafisk:

`plot(4 sin(x)2 - sin(x), x = 0 .. 2 π, size = [300, 300])`



Tip: Hvis du vil have en x-akse, der er nemmere at aflæse på, kan du erstatte 2π i plot-kommandoen med 6.28

Det ser ud til, at der er 5 løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$. Umiddelbart kan du aflæse, at 0, π og 2π er løsninger, og de to sidste løsninger kan du finde vha. *intervalsolve*.

with(Gym) :

`intervalsolve(4 sin(x)2 - sin(x) = 0, x = 0 .. 2 π)`

$$\left[0, \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), -\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + \pi, \pi, 2\pi \right] \quad (1.9)$$

Og vil du have de numeriske løsninger:

`fintervalsolve(4 sin(x)2 - sin(x) = 0, x = 0 .. 2 π)`

$$[0., 0.2526802551, 2.888912398, 3.141592654, 6.283185307] \quad (1.10)$$

Alle løsninger i intervallet $[0, 2\pi]$ er således fundet

1.3 Den harmoniske svingning

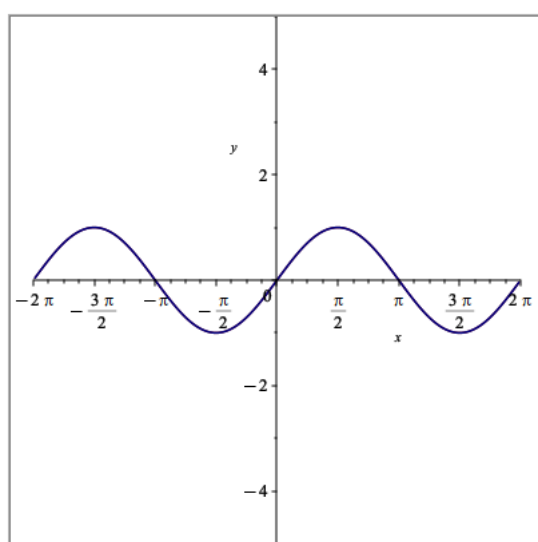
En harmonisk svingning er en funktion af formen

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$$

hvor A er amplituden, ω er vinkelhastigheden, φ er fasen og B er forskydningen (op/ned).

Du kan undersøge betydningen af de indgående konstanter ved at lege lidt med figuren nedenfor. Her er tegnet to sinuskurver - en rød og en blå. Den blå ligger oven i den røde, så du ser kun den blå.

Den blå kurve kan deformeres ved at trække i skyderne nederst medens den røde kurve ligger fast som reference. Prøv!



Nulstil

A 1.

ω 1.

φ 0.

B 0.

Eksempel

Visse steder ændres vanddybden i havet på grund af tidevand. I et bestemt døgn er vanddybden $f(t)$, målt i meter, bestemt ved

$$f(t) = 7 + \sin\left(\frac{t-2}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 24$$

hvor t angiver antallet af timer efter kl. 12.

- Bestem den største og den mindste vanddybde i døgnets løb.
- Hvornår indtræffer det første højvande?
- Hvor lang tid går der inden det næste højvande indtræffer?
- På hvilke tidspunkter i dette døgn vokser vanddybden hurtigst?

Løsning med numerisk værktøj

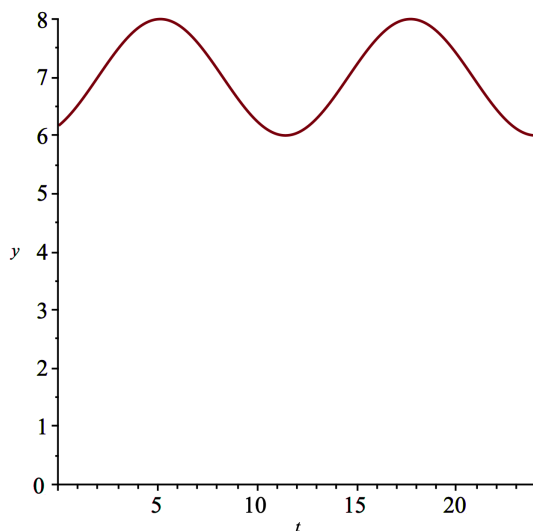
(Du kan naturligvis løse denne opgave udelukkende ud fra egenskaber for en harmonisk svingning)

Start med at definere funktionen i Maple og tegn grafen i det aktuelle interval – dvs. $t \in [0, 24]$:

$$f(t) := 7 + \sin\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

$$f := t \mapsto 7 + \sin\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad (1.11)$$

`plot(f(t), t = 0 .. 24, y = 0 .. 8, size = [300, 300])`



a)

Bestem den største og den mindste vanddybde i døgnets løb.

`maximize(f(t), t = 0 .. 24)`

$$8 \quad (1.12)$$

`minimize(f(t), t = 0 .. 24)`

$$6 \quad (1.13)$$

Dette viser, at

Mindste vanddybde = 6 meter

Største vanddybde = 8 meter

b)

Hvornår indtræffer det første højvande?

Benyt her *maximize* med optionen *location*. Herved får du ud over maksimumsværdien også beregnet hvor maksimum antages:
 $\text{maximize}(f(t), t = 0 \dots 24, \text{location})$

$$8, \left\{ \left[\{t = 2 + 5\pi\}, 8 \right], \left[\{t = \pi + 2\}, 8 \right] \right\} \quad (1.14)$$

Hvis du vil undgå en eksakt løsning, kan du i stedet for 24 skrive 24.0 (eller bare 24.). Det vil tvinge Maple til at lave en numerisk beregning

$\text{maximize}(f(t), t = 0 \dots 24.0, \text{location})$

$$8., \left\{ \left[\{t = 5.141592654\}, 8. \right], \left[\{t = 17.70796327\}, 8. \right] \right\} \quad (1.15)$$

Dvs., det første højvande indtræffer lidt efter kl 17 (idet t er tiden efter kl. 12.00).

c)

Hvor lang tid går der inden det næste højvande indtræffer?

Denne opgave er klaret med beregningen i b):

$$5\pi + 2 - (\pi + 2) = 4\pi$$

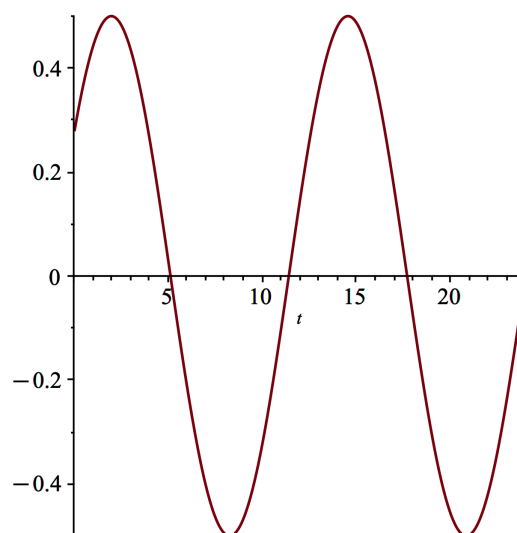
Dvs., der går 12.6 timer.

d)

På hvilke tidspunkter i dette døgn vokser vanddybden hurtigst?

Det må være til de tidspunkter, hvor $f'(t)$ har maksimum. Tegn grafen for $f'(t)$:

$\text{plot}(f'(t), t = 0 \dots 24, \text{size} = [300, 300])$



$\text{maximize}(f'(t), t = 0 \dots 24, \text{location})$

$$\frac{1}{2}, \left\{ \left[\{t = 2\}, \frac{1}{2} \right], \left[\{t = 2 + 4\pi\}, \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (1.16)$$

Det ses, at til tidspunkterne $t = 2$ og $t = 4\pi + 2$ har $f'(t)$ maksimum. Dvs., at til disse tidspunkter vokser vanddybden hurtigst. Tilbage er blot at omregne til tidspunkter efter kl. 12.00:

$$4\pi + 2 \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 14.566$$

Vanddybden vokser hurtigst kl. ca. 14.30 og kl 02.00.

2 Integralregning

2.1 Stamfunktion

Det er meget nemt at finde en stamfunktion i Maple. Hvis du vil finde en stamfunktion til funktionen:

$$f(x) := 2x^2 - 3x + 5$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 \quad (2.1)$$

så klikker du på integral knappen $\int f \, dx$ i **Expression**-paletten, og udfylder skabelonen:

$$\int f(x) \, dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x$$

Læg mærke til, at du ikke får en integrationskonstant k med. Ønsker du det, så kan du klare det sådan her:

$$\int f(x) \, dx + k = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + k$$

Navngivning af stamfunktionen

Lidt mere kompliceret bliver det, hvis du vil navngive din stamfunktion F . Problemet opstår, hvis du prøver at definere således:

$$F(x) := \int f(x) \, dx + k$$

$$F := x \mapsto \int f(x) \, dx + k \quad (2.2)$$

Maple beregner ikke stamfunktionen før der er behov for at kende den (det kaldes lazy evaluation). Ønsker du fx at beregne $F(2)$, vil x blive erstattet med 2, og udtrykket i **(2.2)** være meningsløst.

Der er flere måder at navngive stamfunktionen på:

Metode 1:

Du kan copy&paste udtrykket til definitionen

$$F(x) := \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + k$$

$$F := x \mapsto \frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x + k \quad (2.3)$$

Metode 2

Klik på udtrykket for stamfunktionen, og vælg **Assign to a Name** i kontekstmenuen. I den lille boks, der popper op, skriver du $F(x)$.



Det kommer til at se sådan ud

$$\int f(x) \, dx + k = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + k \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$$

Metode 3

Benytte kommandoen *MakeFunction* :

$$F := \text{MakeFunction} \left(\int f(x) \, dx + k, x \right)$$

$$F := x \mapsto \frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x + k \quad (2.4)$$

Eksempel 1

Find den stamfunktion til $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, der opfylder, at $F(1) = 7$.

restart

$$f(x) := 2x^2 - 3x + 5$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 \quad (2.5)$$

Stamfunktionen bestemmes:

$$\int f(x) \, dx + k = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + k \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$$

$$F(1) = 7 \stackrel{\text{simple}}{=} \frac{25}{6} + k = 7 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ k = \frac{17}{6} \right\}$$

$$\text{Dvs., den ønskede stamfunktion bliver } F(x) = \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + \frac{17}{6}$$

Eksempel 2

En funktion f er givet ved $f(x) = 2x - 3$.

Find den stamfunktion F der har linjen med ligningen $y = x + 5$ som tangent.

I modsætning til eksempel 1 kender vi ikke her et punkt, som F skal gå i gennem. Det må vi så finde! Og det punkt, vi skal bruge, er tangeringspunktet.

Linjen $y = x + 5$ har hældningen 1, så hvis denne skal være tangent til F , må det ske i et punkt x , hvor $F'(x) = 1$.

restart

$$f(x) := 2x - 3$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x - 3 \quad (2.6)$$

$$\int f(x) \, dx + k = x^2 + k - 3x \xrightarrow{\text{assign to a name}} F(x)$$

Vi finder ud af, hvor tangeringen sker ved at løse ligningen $F'(x) = 1$ (hvilket i øvrigt er det samme som ligningen $f(x) = 1$):

$$F'(x) = 1 \xrightarrow{\text{simplicity}} 2x - 3 = 1 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 2\}$$

I punktet med x -koordinaten 2 har F altså en tangent med hældningen 1. Hvis denne tangent skal være $y = x + 5$, så må tangeringen ske i punktet $(2, 7)$. Dette ses ved at sætte 2 ind i $y = x + 5$.

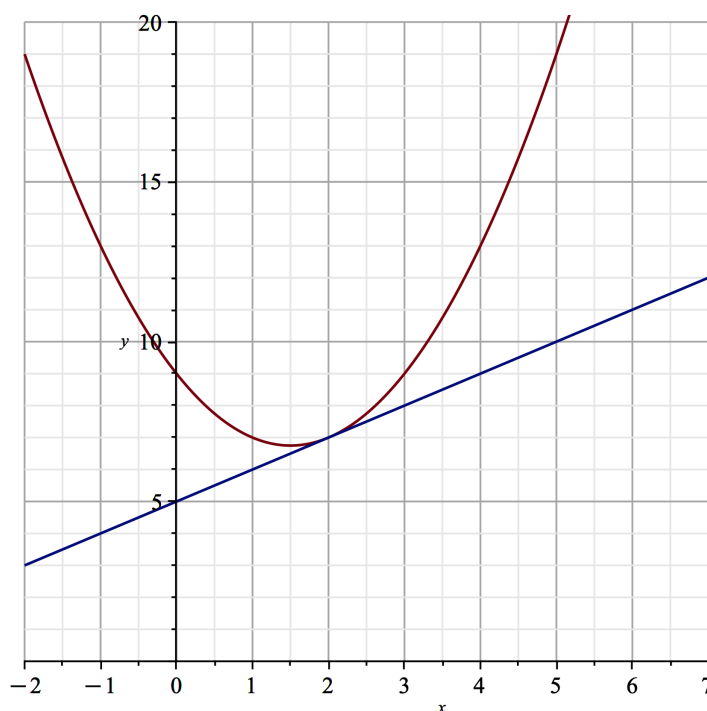
Tilbage er nu blot at bestemme k :

$$F(2) = 7 \xrightarrow{\text{simplicity}} -2 + k = 7 \xrightarrow{\text{solutions for k}} 9 \xrightarrow{\text{assign to a name}} k$$

så har du den ønskede stamfunktion

$$F(x) = x^2 - 3x + 9$$

`plot([F(x), x + 5], x = -2 .. 7, y = 0 .. 20, gridlines, size = [400, 400])`



2.2 Areal under en graf

Hvis f er en positiv funktion i intervallet $[a, b]$, kan **arealet** af den punktmængde, der begrænses af grafen for f , linjerne med ligningerne $x = a$ og $x = b$, og førsteaksen – dvs. punktmængden

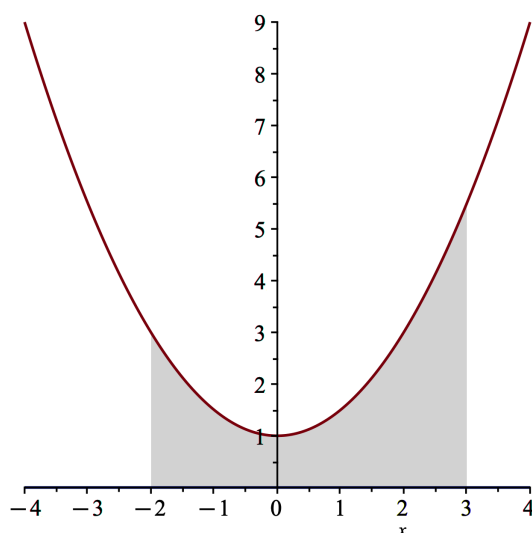
$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

bestemmes som $F(b) - F(a)$, hvor F er en vilkårlig valgt stamfunktion til f .

Dette areal kan bestemmes som $\int_a^b f(x) \, dx$, hvor skabelonen $\int_a^b f \, dx$ fra Expression-paletten benyttes til at skrive integralet.

Skabelonen har 4 pladsholdere. Du udfylder skabelonen ved at hoppe fra pladsholder til pladsholder med TAB-tasten, og 'skrive oveni'.

I nedenstående figur ser du tegnet grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$



Det skraverede område kan beskrives ved punktmængden:

$$\{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

og arealet bestemmes således:

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{2}x^2 + 1 \, dx = \frac{65}{6}$$

Hvis du har defineret funktionen f ved:

$$f(x) := \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$f := x \mapsto \frac{x^2}{2} + 1 \tag{2.7}$$

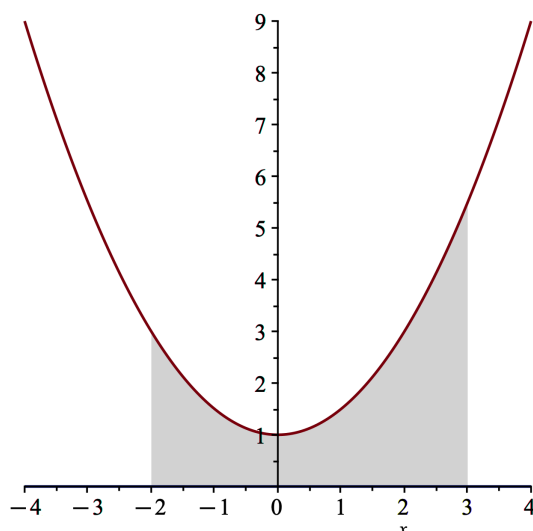
Kan du naturligvis blot indsætte $f(x)$ som integrand:

$$\int_{-2}^3 f(x) \, dx = \frac{65}{6}$$

Til at tegne en graf med et skraveret område (som på figuren ovenfor), kan du benytte kommandoen *skraver* fra Gym-pakken

with(Gym) :

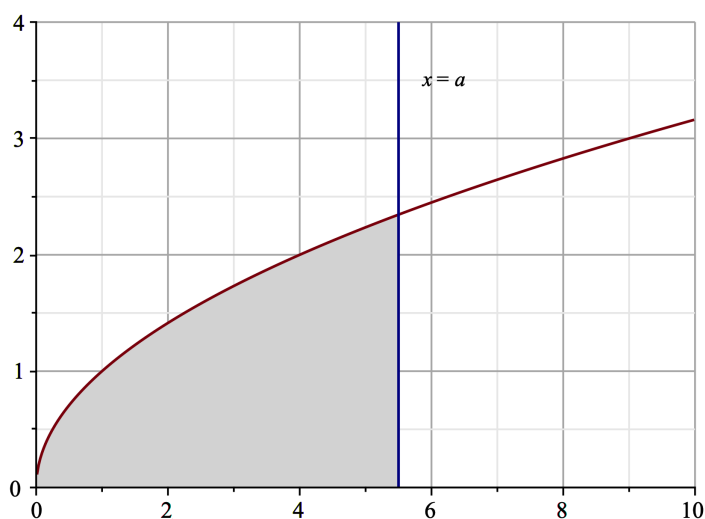
`skraver([f(x), 0], x = -4 .. 4, x = -2 .. 3, size = [300, 300])`



skraver-kommandoen er beregnet til at skravere et område mellem to funktionsgrafer. Her er den ene grafen for f – den anden, grafen for $g(x) = 0$, der jo falder sammen med x-aksen

Eksempel 1

På figuren ser du tegnet grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Hvor skal linjen $x = a$ placeres, hvis arealet af det skraverede område skal være 10?



Løsning:

Ligningen, vi kommer til at løse, er denne

$$\int_0^a \sqrt{x} \, dx = 10 \stackrel{\text{simplicity}}{=} \frac{2 a^{3/2}}{3} = 10 \stackrel{\text{solve}}{\longrightarrow} 6.082201996$$

hvor *Numerically Solve* er benyttet.

2.3 Areal af et område begrænset af to grafer

Hvis f og g er to kontinuerte funktioner og $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$ (dvs., at grafen for f ligger over grafen for g i intervallet), så kan arealet af punktmængden

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

bestemmes som

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Eksempel 1

Graferne for funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{4} x^2 - x + 5$$

$$g(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{7}{2} x - 3$$

afgrænser sammen med linjerne med ligningerne $x = 2$ og $x = 5$ et område, der har et areal.

Bestem arealet af dette område.

Løsning

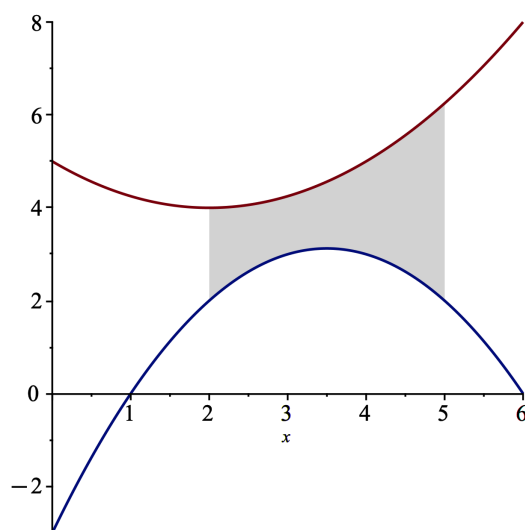
$$f(x) := \frac{1}{4} x^2 - x + 5 :$$

$$g(x) := -\frac{1}{2} x^2 + \frac{7}{2} x - 3 :$$

Først tegner vi området med kommandoen `skriver` fra Gym-pakken. Det første interval, er det interval, graferne skal tegnes i, det andet interval er, hvor der skal skrives.

with(Gym) :

skraver([f(x), g(x)], x = 0 .. 6, x = 2 .. 5, size = [300, 300])



Da grafen for f ligger over grafen for g , kan vi bestemme arealet af det skraverede område således: $\int_2^5 (f(x) - g(x)) \, dx = 6$

Eksempel 2

Grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

begrænser sammen med x -aksen et område i 4. kvadrant, der har et areal.

Bestem dette areal

Løsning

Her kan x -aksen opfattes som den øverste funktion og grafen for f som den nederste funktion. Vi kan så finde arealet således

$$f(x) := \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3$$

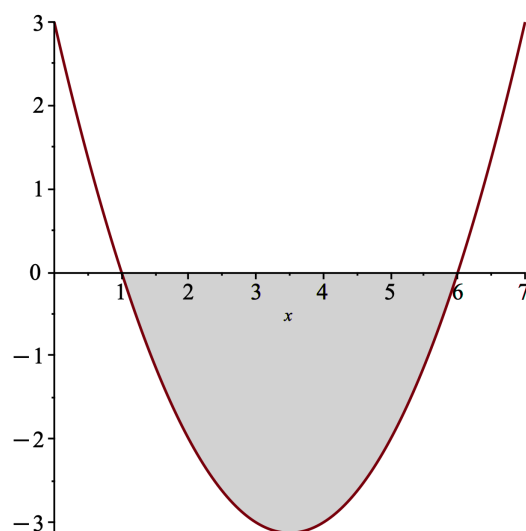
$$f := x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{7}{2} \cdot x + 3 \quad (2.8)$$

Vi finder skæringspunkterne med x -aksen:

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 6\}, \{x = 1\}$$

og tegner området

`skriver(f(x), x = 0 .. 7, x = 1 .. 6, size = [300, 300])`



Arealet bliver da:

$$\int_1^6 (0 - f(x)) \, dx = -\frac{305}{12}$$

Eksempel 3

Graferne for funktionerne

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5}$$

afgrænser i første kvadrant et område, der har et areal.

Bestem dette areal.

Løsning:

$$f(x) := \sqrt{x}$$

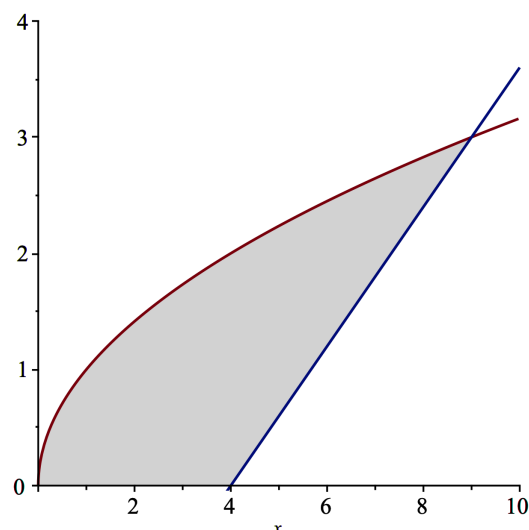
$$f := x \mapsto \sqrt{x} \tag{2.9}$$

$$g(x) := \frac{3}{5}x - \frac{12}{5}$$

$$g := x \mapsto \frac{3 \cdot x}{5} - \frac{12}{5} \tag{2.10}$$

Først tegner vi de to grafer, så vi kan få området lokaliseret (vi tegner kun i 1. kvadrant,):

`skriver([f(x), g(x)], x = 0 .. 10, y = 0 .. 4, size = [300, 300])`



Vi bestemmer det x , hvor de to grafer skærer hinanden:

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 9\}$$

og det x , hvor grafen for g skærer x -aksen:

$$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4\}$$

Området, vi skal bestemme arealet af, er ikke et simpelt område, der er afgrænset af to funktionsgrafer. Vi er derfor nødt til at dele op i to dele:

I intervallet $[0, 4]$ er området begrænset af grafen for f og x -aksen.

I intervallet $[4, 9]$ er området begrænset af grafen for f og grafen for g , hvor grafen for f ligger over grafen for g i hele intervallet.

Arealet bliver derfor:

$$\int_0^4 f(x) \, dx + \int_4^9 f(x) - g(x) \, dx = \frac{21}{2}$$

Alternativ metode

Vi redefinerer g , så g har værdien 0 i intervallet $[0, 4]$:

$$h(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 4 \\ g(x) & x \geq 4 \end{cases}$$

$$h := x \mapsto \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 4 \\ g(x) & 4 \leq x \end{cases} \quad (2.11)$$

Herefter kan arealet bestemmes sådan her:

$$\int_0^9 f(x) - h(x) \, dx = \frac{21}{2}$$

2.4 Omdrejningslegemer

Lad f være en positiv funktion i intervallet $[a, b]$. Rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at rotere punktmængden

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

360° om x -aksen kan beregnes ved integralet

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

At beregne rumfang af omdrejningslegemer i Maple er således stort set kun en indsættelsesøvelse. Men i Maple kan du også lave en nydelig tegning af omdrejningslegemet.

Lad os se på et eksempel:

Find rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at rotere punktmængden i første kvadrant begrænset af grafen for $f(x) = x^2$ og linjen $x = 2$.

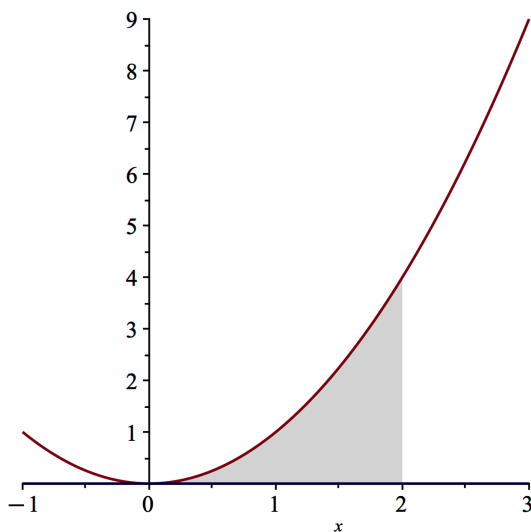
$$f(x) := x^2$$

$$f := x \mapsto x^2 \quad (2.12)$$

Området tegnes:

`with(Gym) :`

`skraver([f(x), 0], x = -1 .. 3, x = 0 .. 2, size = [300, 300])`

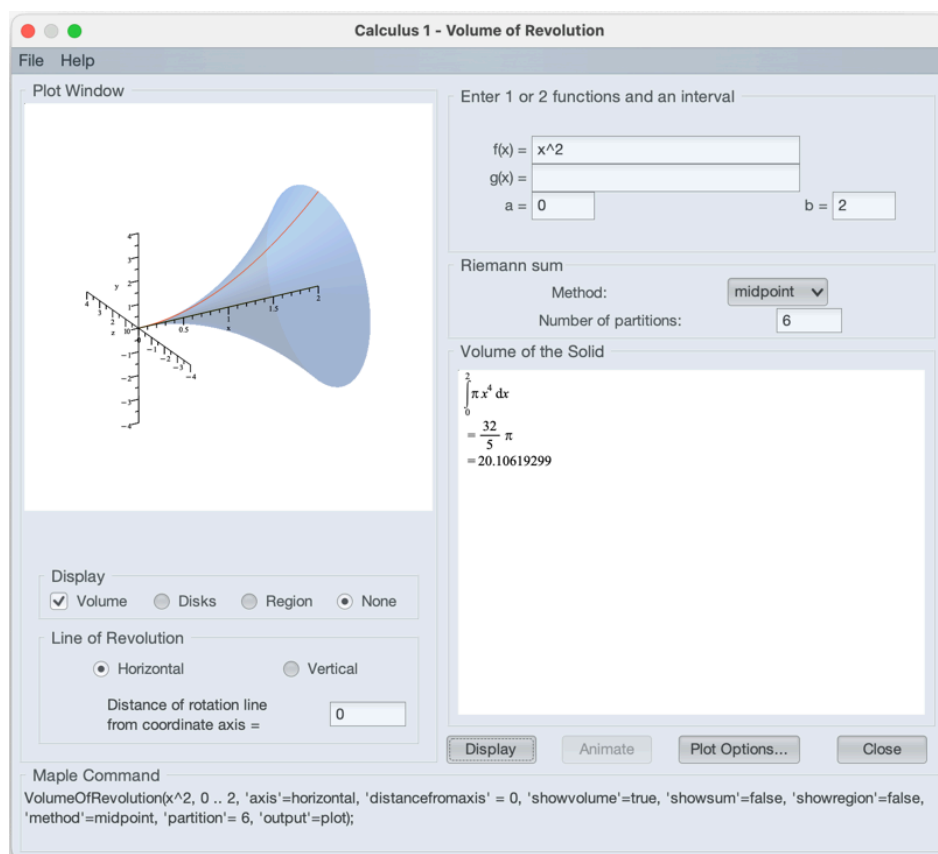


Rumfanget af omdrejningslegemet bliver:

$$\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 \, dx = \frac{32\pi}{5}$$

Nu skal du få en Maple Tutor til at klare al arbejdet (og lidt til):

Gå til **Education Tools** fanen. Klik her på knappen **Calculus - Single Variable**, og vælg **Volume of Revolution** i listen der kommer frem:



Indtast x^2 i feltet $f(x) =$.

Intervalgrænserne a og b skal du ikke ændre på.

Tilbage er blot at trykke på **Display**-knappen, så vil du se det samme billede som vist ovenfor.

Hvis du klikker på **Close**-knappen, lukker vinduet, og du får billedet af omdrejningslegemet indsat i dit dokument.

Tip: Hvis du har funktionen, du skal bruge i Volume of Revolution, defineret som $f(x)$, så kan du blot skrive $f(x)$ i feltet $f(x) =$.

Eksempel 1

Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = 2\sqrt{x} \text{ og } g(x) = \frac{1}{2}x.$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme der fremkommer ved at lade området afgrænset af de to grafer rotere 360° om x-aksen.

Løsning uden brug af Tutor

Først defineres de to funktioner, og graferne tegnes:

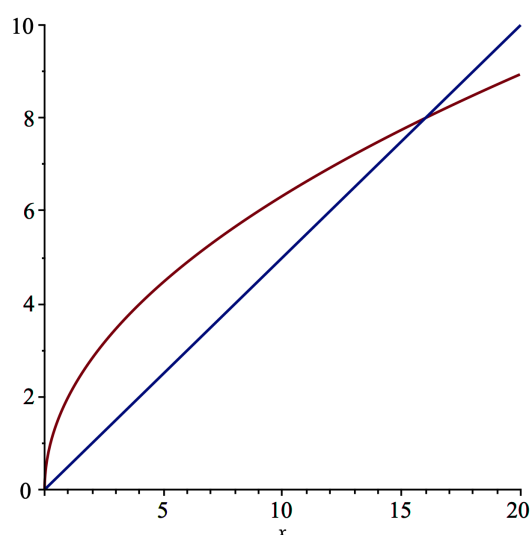
$$f(x) := 2\sqrt{x}$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x} \quad (2.13)$$

$$g(x) := \frac{1}{2}x$$

$$g := x \mapsto \frac{x}{2} \quad (2.14)$$

`plot([f(x), g(x)], x = 0 .. 20, size = [300, 300])`



Skæringspunkterne bestemmes:

`solve(f(x) = g(x), x)`

$$0, 16 \quad (2.15)$$

Volumenet bliver

$$\pi \cdot \int_0^{16} f(x)^2 dx - \pi \cdot \int_0^{16} g(x)^2 dx = \frac{512 \pi}{3}$$

Løsning med Tutor

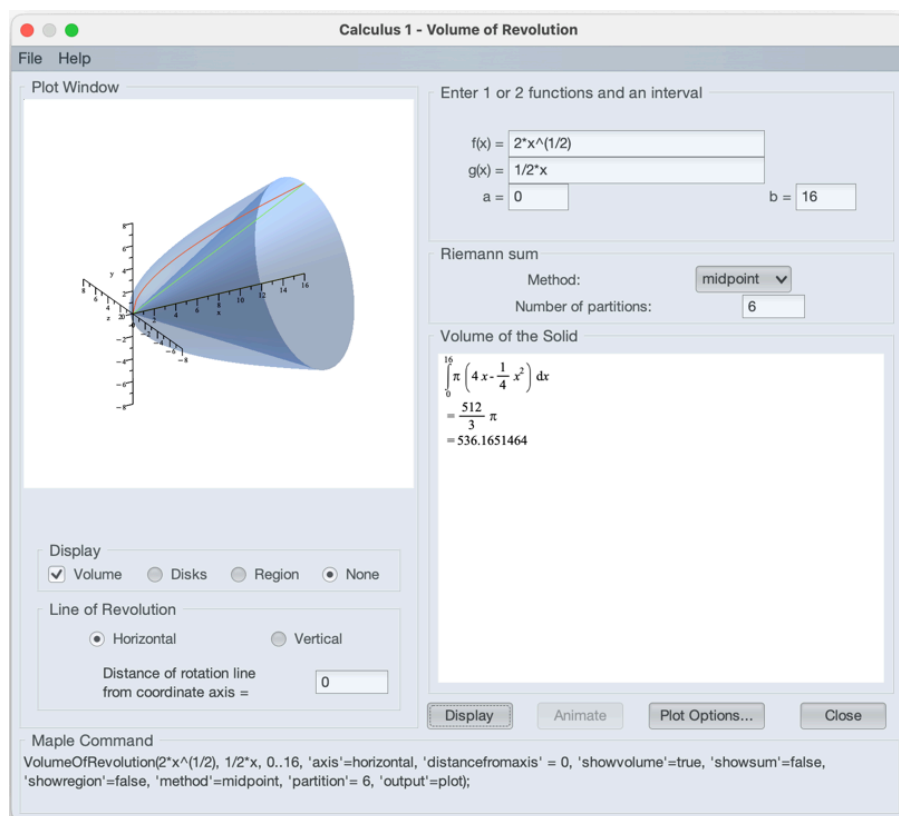
Oftentimes er det en god ide at definere funktionerne – som ovenfor – ellers skal du indtaste dem som:

`2*sqrt(x)` og `x^2`.

Du kan ikke bruge skabelonen til kvadratrodd i Tutoren. Så vil du slippe for at skulle skrive i en speciel syntaks, så definer funktionerne først og indtast blot $f(x)$ og $g(x)$ i de to felter.

Når du indtaster $f(x)$ og $g(x)$ i felterne, og taster Enter efter hver af dem, så vil Maple straks indsætte regneforskriften for de to funktioner.

Skæringspunktet skal bestemmes inden du starter Tutoren:



Selve resultatet kan du kopiere (med Ctrl C) og indsætte i en tekstregion efter at Tutoren er lukket.

$$\begin{aligned} & \int_0^{16} -\frac{1}{4} \pi x (-16 + x) dx \\ &= \frac{512}{3} \pi \\ &= 536.1651464 \end{aligned}$$

OBS: Du skal ikke bruge dette til en afleveringsopgaver. Nok er resultatet korrekt, men det fremgår ikke, at integralet er udregnet som

$$\pi \cdot \int_0^{16} f(x)^2 dx - \pi \cdot \int_0^{16} g(x)^2 dx = \frac{512 \pi}{3}$$

Eksempel 2

Betragt de to funktioner

$$f(x) = 4 \cdot \sqrt{x-1} \quad \text{og} \quad g(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$$

Graferne for funktionerne afgrænser sammen med koordinataksene en punktmængde M , der har et areal. Funktionerne bruges som model for fremstilling af en træskål, som dannes, idet punktmængden M drejes 360° omkring x -aksen

a) Bestem skålens trærumfang

Løsning

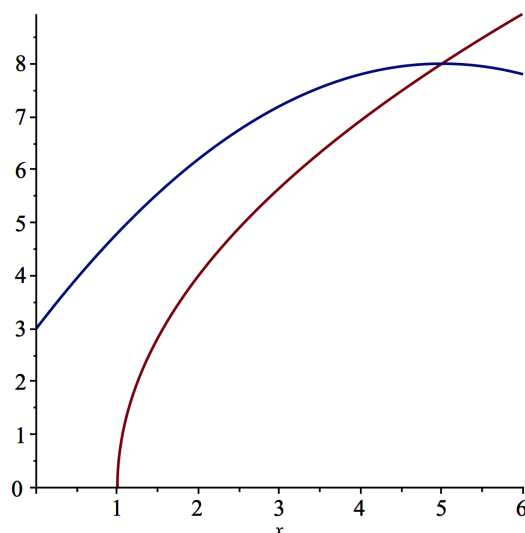
$$f(x) := 4 \cdot \sqrt{x-1}$$

$$f := x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x-1} \quad (2.16)$$

$$g(x) := -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$$

$$g := x \mapsto -\frac{1}{5} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3 \quad (2.17)$$

$$\text{plot}([f(x), g(x)], x=0..6, \text{size}=[300, 300])$$



Det ser ud til, at graferne skærer i 5. Lad os lige tjekke (solve giver 5 og et komplekst resultat, så det er en god idé blot at bruge *fsolve* her):

$$\text{fsolve}(f(x) = g(x)) \quad 5.000000000 \quad (2.18)$$

Du kan ikke umiddelbart bruge Tutoren i denne opgave, da de to intervaller, du skal integrere over, ikke er ens. Der er kun mulighed for ét fælles interval i Tutoren (se nedenfor for en løsning på dette):

Rumfanget bliver (g er den øverste funktion - den blå!)

$$\pi \cdot \int_0^5 g(x)^2 dx - \pi \cdot \int_1^5 f(x)^2 dx = \frac{251 \pi}{3}$$

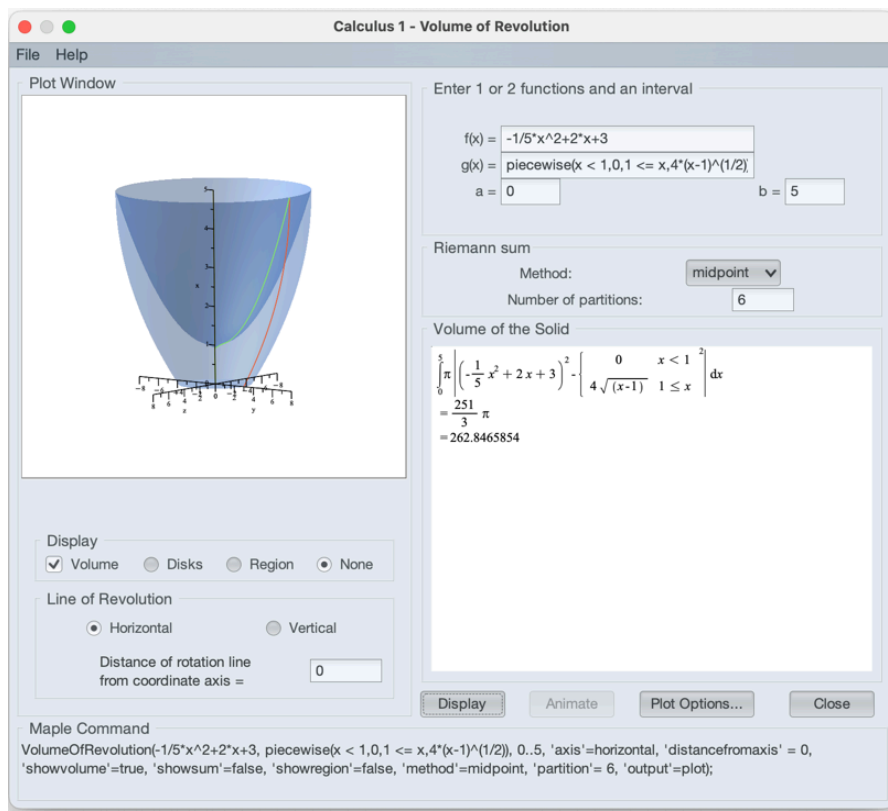
Løsning med Tutor:

Hvis du vil bruge Tutoren, så er du nødt til at udvide f , således at den er defineret i $[0, 5]$. Det klares således (herved bliver værdien af integralerne ikke ændret):

$$h(x) := \begin{cases} 0 & x < 1 \\ f(x) & x \geq 1 \end{cases}$$

$$h := x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 1 \\ f(x) & 1 \leq x \end{cases} \quad (2.19)$$

Indtast så $g(x)$ og $h(x)$ som de to funktioner i Tutoren og indstil intervallet til $[0, 5]$. Så får du samme resultat som ovenfor. Det kommer til at se sådan ud, hvor figuren dog er drejet for at få det til at minde om en skål:



Der er endnu flere muligheder i Volume of Revolution Tutor. Fx kan du rotere om enhver vandret linje – og ikke blot x -aksen. Desuden er der også mulighed for at rotere om y -aksen.

Du kan også bruge Volume of Revolution Tutor til at forstå noget af teorien bag rumfang af omdrejningslegemer:

Du kan vælge at skære omdrejningslegemet op i et antal lige tykke skiver. Antallet indstiller du i **Number of Partitions** feltet. Som standard er valgt 6.

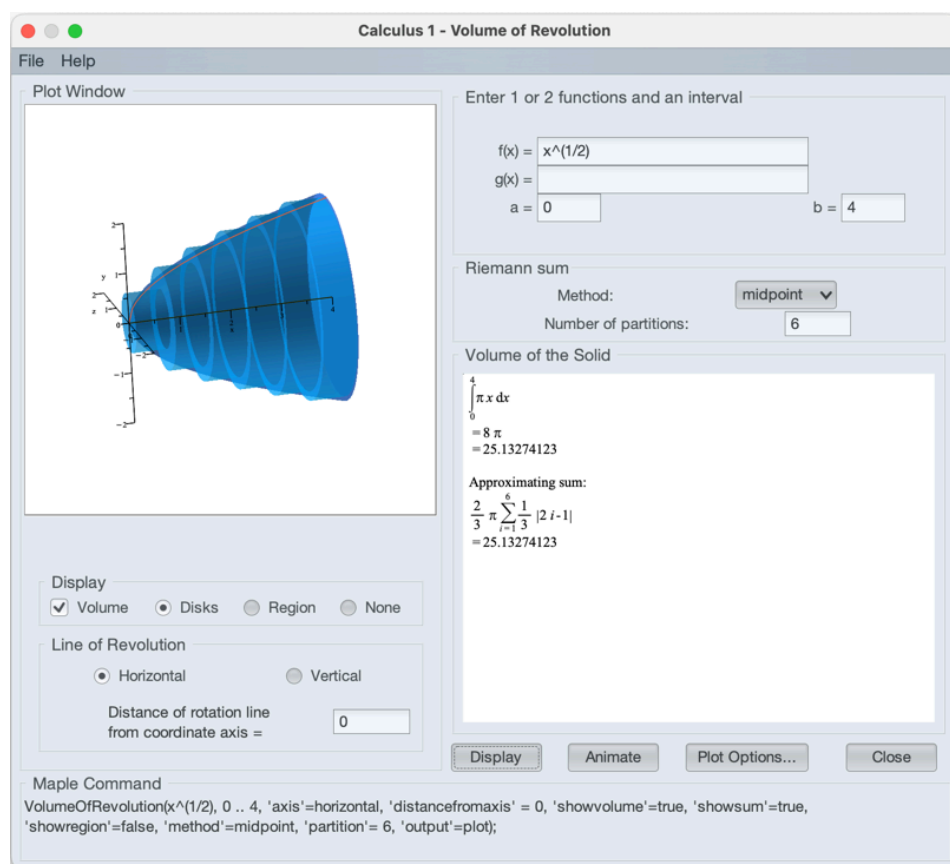
Hver af disse skiver skal approksimeres med en cylinder. Cylinderens højde er fastlagt ved tykkelsen af skiven, men radius kan vælges på 3 måder: Venstre endepunkt, højre endepunkt eller midtpunktet. Dit valg skal du indstille i **Method** drop-down listen.

Under plot-vinduet finder du en række radio-knapper. Tryk her på den midterste **Disks**, så vises plottet med de skiver, du har valgt.

I det store felt kan du se, hvad det eksakte rumfang er. Desuden kan du se, hvad rumfanget af dine diske er. Hvis du øger antallet af skiver, skulle du gerne se, at rumfanget af dine diske nærmer sig det eksakte rumfang – uanset valget af radius (left, midpoint, right).

Eksperimenter!

Nedenfor ser du, hvordan det kommer til at se ud med funktionen $\sqrt{x}$.



2.5 Kurvelængde

Hvis funktionen f er kontinuert i $[a, b]$ og differentiabel i $]a, b[$ kan længden af grafen mellem punkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ bestemmes med formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

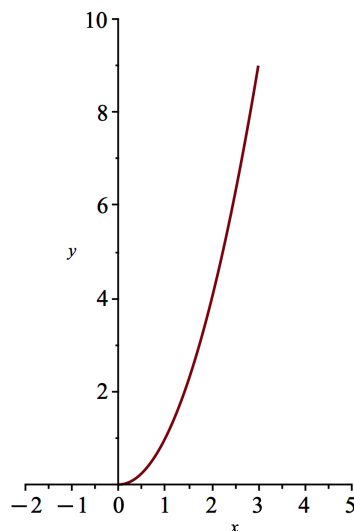
Eksempel 1

$$f(x) := x^2$$

$$f := x \mapsto x^2 \quad (2.20)$$

Vi vil finde længden af kurven tegnet nedenfor (*scaling = constrained* bevirker, at vi har samme enhed på akserne)

`plot(f(x), x = 0 .. 3, y = 0 .. 10, view = [-2 .. 5, 0 .. 10], scaling = constrained )`



Vi sætter ind i formlen

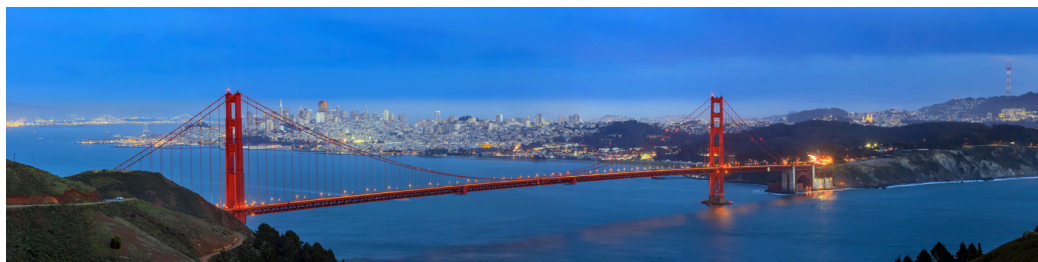
$$\int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \frac{3\sqrt{37}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh}(6)}{4} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 9.7472$$

I langt de fleste tilfælde vil integralet give noget ret uforståeligt. Derfor vil det være fint, hvis det eksakte resultat kan udelades. En metode, der for det meste vil virke, er at sætte punktum efter tallene i grænserne, så de opfattes som decimaltal:

$$\int_{0.}^{3.} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 9.747088759$$

Så længden af kurven bliver altså 9.75

Eksempel 2 - Golden Gate



Afstanden mellem pylonerne på Golden Gate i San Francisco er 1280 m. Højden af pylonerne over vejbanen er 152 m.

Brobanen mellem pylonerne flad.

Hovedkablet mellem pylonerne er ikke helt parabelformet, men næsten – heller ikke helt formet som en såkaldt kædelinje, men næsten.

Vi indlægger et koordinatsystem med x-aksen langs brobanen og y-aksen midt mellem pylonerne. I dette koordinatsystem kan bærekablet modelleres ved funktionen

$$f(x) := 1280 \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{1326}} + e^{-\frac{x}{1326}}}{2} - 1 \right)$$

$$f := x \mapsto 640 \cdot e^{\frac{x}{1326}} + 640 \cdot e^{-\frac{x}{1326}} - 1280 \quad (2.21)$$

Vi tjekker først, om grafen for f går gennem punkterne $(-640, 152)$ og $(640, 152)$:

$$f(-640) = 152.008372$$

$$f(640) = 152.008372$$

Længden af bærekablet mellem de to pyloner kan udregnes

$$\int_{-640}^{640} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 1326.956474$$

Så bærekablet er ca. 1327 meter.

3 Differentialligninger

3.1 Eksakt løsning af differentialligninger

Du kan løse ganske mange typer af differentialligninger eksakt i Maple, men her vil vi blot nøjes med at se på nogle simple, men typiske eksempler.

En differentialligning som fx

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y$$

skal i Maple formuleres således:

$$y'(x) = 2 \cdot x + y(x)$$

Hvor du eksplicit gør opmærksom på, at y er en funktion af x . I stedet for at bruge notationen $y'(x)$ kan du anvende differentiations symbolet $\frac{d}{dx} y(x)$, men den førstnævnte er ofte mere bekvem at anvende.

Du løser differentialligningen ved at klikke, og vælge **solve DE > y(x)** i kontekstmenuen

$$y'(x) = 2x + y(x) \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -2x - 2 + e^x c_1$$

– eller benytte kommandoen *dsolve* :

$$dsolve (y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y(x))$$

$$y(x) = -2x - 2 + e^x c_1 \quad (3.1)$$

hvor c_1 er en konstant.

Bibetingelser

1)

Har du oplyst et punkt, hvor løsningen skal gå i gennem, fx $(0, 2)$, kan du tilføje bibetingelsen således:

$$dsolve (\{y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y(0) = 2\}, y(x))$$

$$y(x) = -2x - 2 + 4e^x \quad (3.2)$$

Du kan også løse med kontekstmenuen:

$$y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y(0) = 2 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -2x - 2 + 4e^x$$

2)

Får du fx oplyst, at løsningskurven har vandret tangent for $x = 2$, så ved du, at $y'(2) = 0$. Dette tilføjer du som bibetingelse:

$$dsolve (\{y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y'(2) = 0\}, y(x))$$

$$y(x) = -2x - 2 + 2e^{-2+x} \quad (3.3)$$

Du kan også løse med kontekstmenuen:

$$y'(x) = 2 \cdot x + y(x), y'(2) = 0 \xrightarrow{\text{solve DE}} y(x) = -2x - 2 + 2e^{-2+x}$$

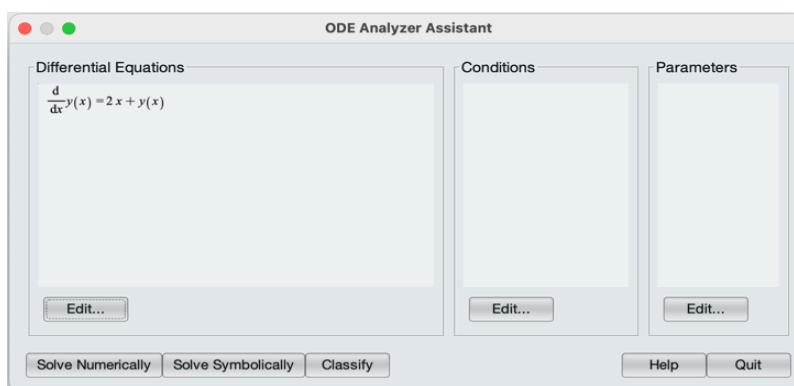
3.2 Interactive Solver

Du kan undgå at skulle huske en masse syntaks ved at benytte **Interactive Solver**. Det fungerer således:

Indtast differentialligningen (som ovenfor)

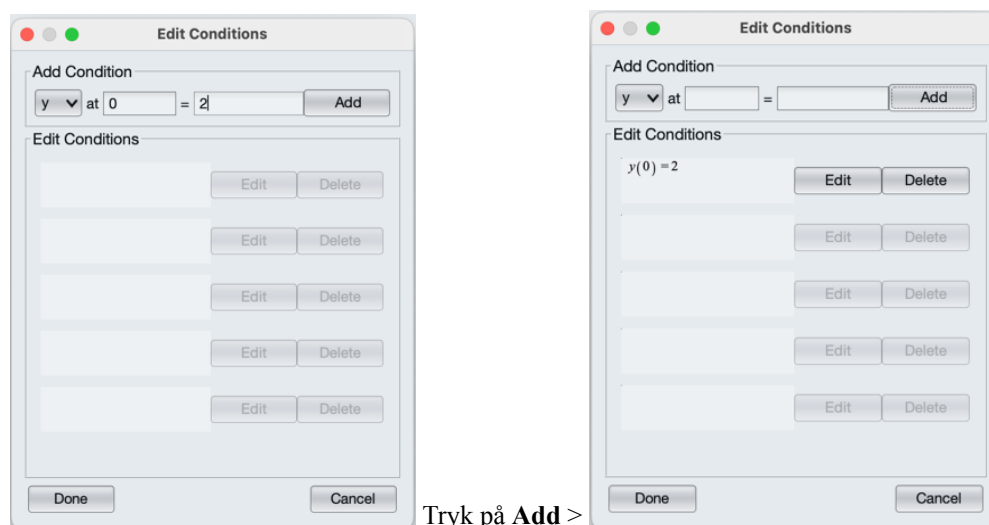
$$y'(x) = 2 \cdot x + y(x) \xrightarrow{\text{solve DE interactively}}$$

Klik på differentialligningen, vælg **Solve DE Interactively** i kontekstmenuen og ODE Analyzer Assistant kommer frem:



Differentialligningen er på plads i den første rude. I den midterste rude kan bibetingelser indtastes.

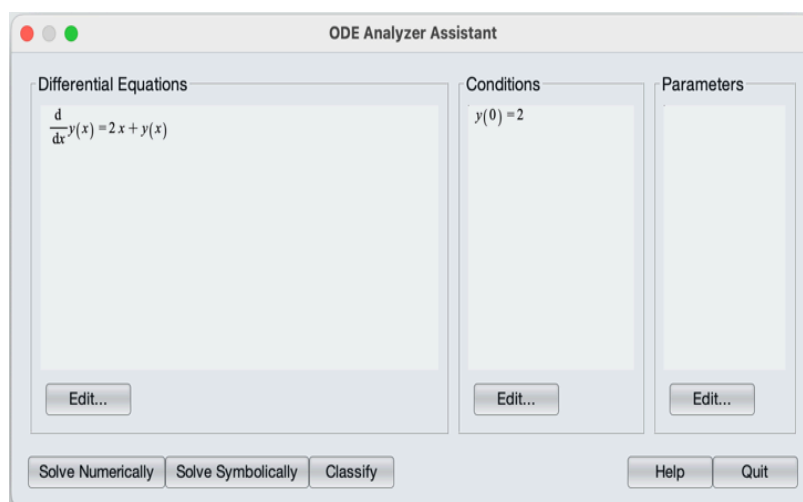
Tryk på **Edit**-knappen under den midterste rude. Den nye dialog, der kommer frem, udfylder du som vist nedenfor



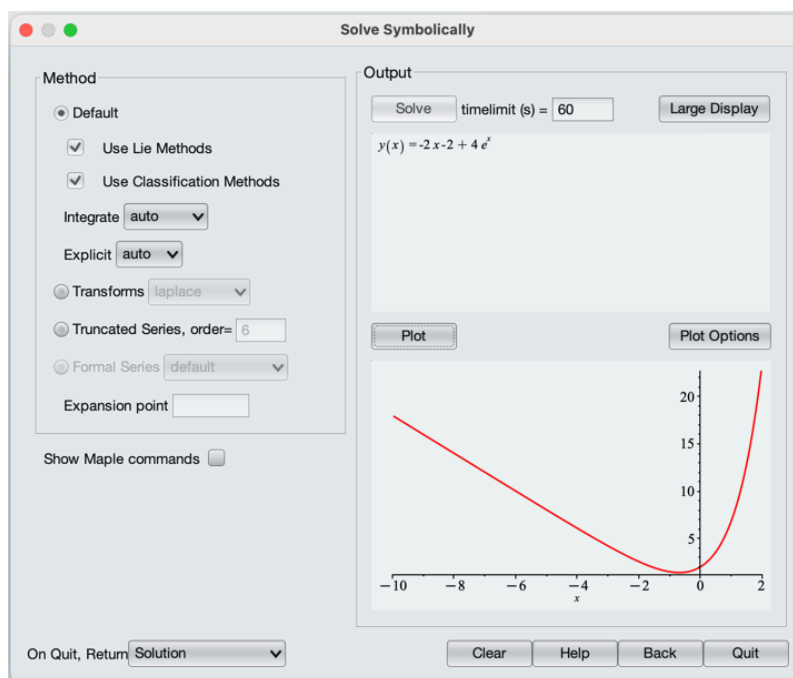
Tryk på **Add** >

Afslut med at trykke på **Done**-knappen.

Herefter skulle ODE Analyzer Assistant gerne se sådan ud:

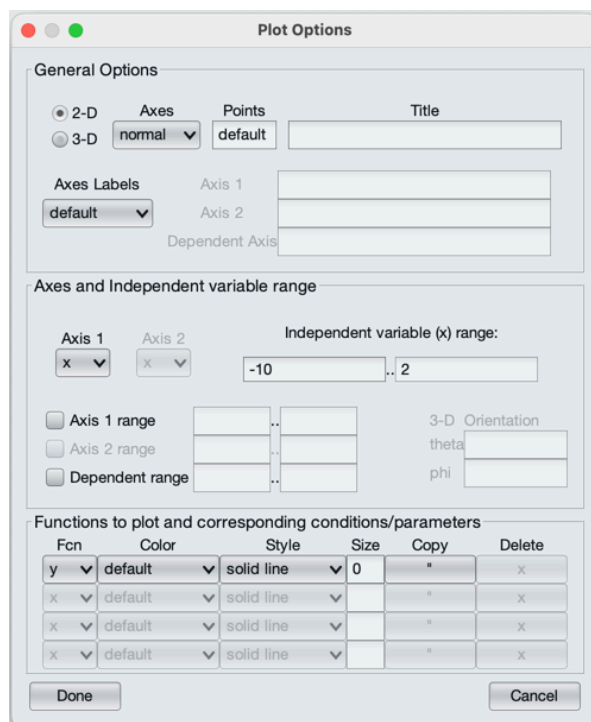


Tryk på knappen **Solve Symbolically**:

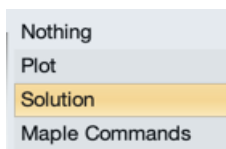


For at få dette resultat frem, skal du gøre sådan her:

1. Tryk på **Solve**-knappen. Det vil give dig løsningen i den øverste rude.
2. Tryk på **Plot**-knappen. Den graf, der kommer frem, er du næppe tilfreds med, idet den er tegnet i et standardinterval. Klik på **Plot Options**, og indstil som vist på udsnittet nedenfor, og tryk på **Done**, når du har lavet indstillingerne:



3. Hvis du sætter et flueben i feltet **Show Maple commands**, vil du se alle de Maplekommandoer, der skal til, for dels at løse differentialligningen, og dels at tegne grafen med de ønskede indstillinger.
4. Du kan forlade assistenten på flere måder – afhængigt af dit valg i **On Quit Return**:



Ofte kan det være hensigtsmæssigt at returnere Maple kommandoerne. Disse kommandoer kan med fordel redigeres en smule, da de ikke altid står med den smukkeste typografi.

3.3 Eksempler af typen $y' = a \cdot y$

Eksempel 1

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen:

$$y' = 0.25 y$$

$$\text{dsolve}(y'(t) = 0.25 y(t), y(t))$$

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{4}} \quad (3.4)$$

hvor c_1 er en konstant. Med almindelig skriveform, er den fuldstændige løsning bestemt ved $y = c \cdot e^{\frac{1}{4}t}$.

Eksempel 2

Bestem en regneforskrift for den løsning til differentialligningen

$$y' = -1.2 \cdot y$$

der går gennem punktet $(2, 5)$.

$$\text{dsolve}(\{y'(t) = -1.2 \cdot y(t), y(2) = 5\}, y(t))$$

$$y(t) = 5 e^{\frac{12}{5}} e^{-\frac{6}{5} t} \quad (3.5)$$

at 5 digits
→

$$y(t) = 55.115 e^{-1.2000 t}$$

Eksempel 3

Funktionen f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0.1 \cdot y$$

Linjen med ligningen $y = 2x + 4$ er tangent til grafen for f .

Bestem koordinaterne til det punkt hvor linjen tangerer grafen, og bestem en regneforskrift for f .

Løsning

Tangeringen må ske i et punkt, hvor $y' = 2$. Indsættes dette i differentialligningen fås:

$$2 = 0.1 y \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 20.\}$$

Dette viser, at y koordinaten til tangeringspunktet er 20. x -koordinaten findes ved at indsætte $y = 20$ i tangentens ligning:

$$20 = 2x + 4 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 8\}$$

Tangeringen sker altså i punktet $(8, 20)$. Differentialligningen kan nu løses:

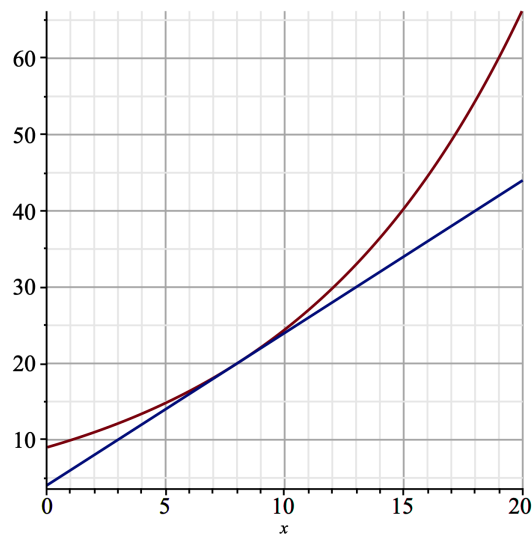
$$\text{dsolve}(\{y'(x) = 0.1 y(x), y(8) = 20\}, y(x))$$

$$y(x) = 20 e^{-\frac{4}{5}} e^{\frac{x}{10}} \quad (3.6)$$

$$f(x) := 20 e^{-\frac{4}{5}} e^{\frac{x}{10}} :$$

Lad os for en god ordens skyld tegne løsningskurven sammen med tangenten $y = 2x + 4$:

`plot([f(x), 2 x + 4], x = 0 ..20)`



3.4 Eksempler af typen $y' = b - a \cdot y$

Eksempel 1

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$y' = 15 - 2.25 \cdot y$$

`dsolve(y'(x) = 15 - 2.25 · y(x), y(x))`

$$y(x) = \frac{20}{3} + e^{-\frac{9x}{4}} c_1 \quad (3.7)$$

Dvs., at den fuldstændige løsning er $y = \frac{20}{3} + c \cdot e^{-\frac{9x}{4}}$, hvor $c \in \mathbb{R}$.

Eksempel 2

Funktionen f er løsning til differentialligningen

$$y' = a \cdot (y - 15).$$

Endvidere er $f(0) = 30$ og $f(3) = 25$.

Bestem værdien af tallet a , og bestem en regneforskrift for f .

Løsning

Differentialligningen løses først sammen med ét af punkterne (ligeegyldigt hvilket) som bibetingelse:

`dsolve({y'(x) = a · (y(x) - 15), y(0) = 30}, y(x))`

$$y(x) = 15 + 15 e^{ax} \quad (3.8)$$

Dernæst indsættes punktet $(3, 25)$, og der løses med hensyn til a :

$$25 = 15 + e^{a \cdot 3} \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ a = \frac{\ln(10)}{3} \right\}$$

Forskriften for f bliver således:

$$f(x) := 15 + 15 e^{\frac{1}{3} \ln(10) \cdot x}$$

$$f := x \mapsto 15 + 15 \cdot e^{\frac{\ln(10) \cdot x}{3}} \quad (3.9)$$

Hvis du gerne vil se et udtryk med decimaltal i stedet for de eksakte værdier, så klarer *evalf* sagen:

$$\text{evalf}(f(x))$$

$$15. + 15. e^{0.7675283643 x} \quad (3.10)$$

– eller Approximate fra kontekstmenuen:

$$f(x) = 15 + 15 e^{\frac{\ln(10) x}{3}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 15. + 15. e^{0.76753 x}$$

3.5 Eksempler - andre typer

Eksempel 1

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y}{2}$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $(1, 4)$.

Løsning

$$\text{dsolve} \left(\left\{ y'(x) = \frac{x \cdot y(x)}{2}, y(1) = 4 \right\}, y(x) \right)$$

$$y(x) = 4 e^{\frac{(x-1)(x+1)}{4}} \quad (3.11)$$

Dvs., at løsningen er $y = 4 e^{\frac{(x-1)(x+1)}{4}}$.

Eksempel 2

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+5}{y}$$

hvis graf går gennem punktet $(0, 4)$.

Løsning

$$dsolve\left(\left\{y'(x) = \frac{x+5}{y(x)}, y(0)=4\right\}, y(x)\right)$$

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 16} \quad (3.12)$$

Af differentialligningen ses, at $y \neq 0$. Dvs., at differentialligningen skal løses i området $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Desuden skal $x^2 + 10x + 16 > 0$:

$$solve(x^2 + 10x + 16 > 0, x)$$

$$(-\infty, -8), (-2, \infty) \quad (3.13)$$

Heraf ses, at $Dm(y) =]-2, \infty[$

3.6 Eksempler af typen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$

Eksempel 1

Løs differentialligningen

$$N' = 0.0003 \cdot (500 - N) \cdot N$$

med begyndelsesværdi $N(0) = 25$ og med begyndelsesværdi $N(0) = 750$.

Løsning

$$dsolve(\{N'(t) = 0.0003 \cdot (500 - N(t)) \cdot N(t), N(0) = 25\}, N(t))$$

$$N(t) = \frac{500}{1 + 19 e^{-\frac{3}{20}t}} \quad (3.14)$$

$$dsolve(\{N'(t) = 0.0003 \cdot (500 - N(t)) \cdot N(t), N(0) = 750\}, N(t))$$

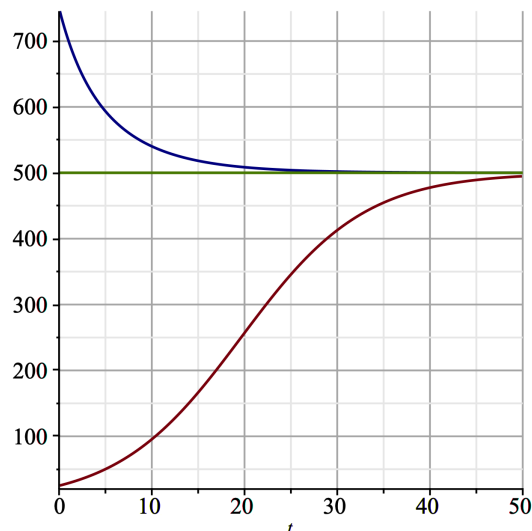
$$N(t) = -\frac{1500}{e^{-\frac{3}{20}t} - 3} \quad (3.15)$$

Lad os tegne graferne for de to løsninger. Først skal de dog defineres som funktioner:

$$N1(t) := \frac{500}{1 + 19 e^{-\frac{3}{20}t}} :$$

$$N_2(t) := -\frac{1500}{e^{-\frac{3}{20}t} - 3} :$$

`plot([N1(t), N2(t), 500], t=0..50, color=["Burgundy", "Navy", "LeafGreen"])`



Eksempel 2

Udviklingen af indbyggertallet i en tænkt storby kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = a \cdot N \cdot (1000000 - N)$$

hvor N er antallet af indbyggere i byen, t er tiden, målt i døgn, og a er en konstant.

Til tiden $t = 0$ er antallet af indbyggere i byen 100000, og når indbyggertallet er 200000 vokser indbyggertallet med 100 indbyggere pr. døgn.

a) Bestem en forskrift for N .

b) Hvor mange døgn går der før der er 600000 indbyggere i byen i følge modellen?

Løsning

Ud fra oplysningen 'når indbyggertallet er 200000 vokser indbyggertallet med 100 indbyggere pr. døgn' kan vi bestemme a ved indsættelse i differentialligningen:

$$100 = a \cdot 200000 \cdot (1000000 - 200000) \xrightarrow{\text{isolate for } a} a = \frac{1}{1600000000}$$

$$dsolve(\{N'(t) = a \cdot N(t) \cdot (1000000 - N(t)), N(0) = 100000\}, N(t))$$

$$N(t) = \frac{1000000}{1 + 9 e^{-\frac{t}{1600}}} \quad (3.16)$$

Vi definerer funktionen N :

$$N(t) := \frac{1000000}{1 + 9 e^{-\frac{1}{1600} t}} :$$

b)

$$N(t) = 600000 \xrightarrow{\text{solve}} 4164.303497$$

Der vil således gå ca. 4164 døgn - eller ca 12 år før befolkningstallet når 600000.

3.7 Linjeelementer og løsningskurver

Differentialligningen $y' = x + y$, eller skrevet med Maple syntaks

$$y'(x) = x + y(x)$$

kan tolkes således, at den i ethvert punkt (x_0, y_0) giver oplysning om tangenthældningen α for en eventuel løsningskurve gennem dette punkt.

Kaldes løsningskurve for f , gælder

$$f(x_0) = y_0 \text{ og } f'(x_0) = \alpha.$$

Dette udtrykkes ved, at f går gennem linjeelementet $(x_0, y_0; \alpha)$.

Fx vil løsningskurven gennem punktet $(2, 1)$ have tangenthældningen

$$y'(2) = 2 + y(2) = 2 + 1 = 3$$

Med andre ord, så vil løsningskurven gå gennem linjeelementet $(2, 1; 3)$.

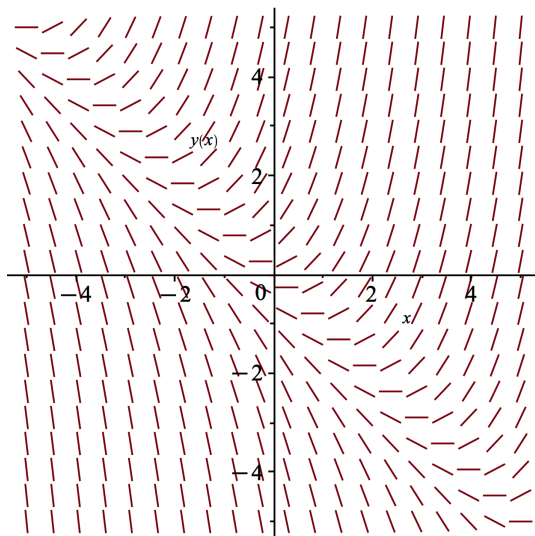
For at kunne danne sig et indtryk af løsningskurvernes forløb, kan man tegne nogle linjeelementer ind i et koordinatsystem:

Går løsningskurven gennem linjeelementet $(x_0, y_0; \alpha)$, tegnes gennem punktet (x_0, y_0) et lille linjestykke med hældningen α .

Det bliver hurtigt et trivielt stykke arbejde, men her kommer Maple os til undsætning.

with(Gym) :

$$\text{linjeelementer}(y'(x) = x + y(x), y(x), x = -5..5, y = -5..5)$$



Opgaven er nu at indtegne løsningskurver således at linjestykkerne er tangenter til kurverne. Dette er en opgave, der kræver lidt øvelse, men umiddelbart ser det ud til, at en ret linje kan tegnes gennem $(0, -1)$ med hældning -1 .

Dvs., at det ser ud til, at $f(x) = -x - 1$ er en løsning til differentialligningen $y' = x + y$

Lad os checke:

Hvis f er en løsning, skal der gælde, at

$$f'(x) = x + f(x)$$

Vi regner begge sider ud hver for sig (med $f(x) = -x - 1$), og undersøger, om vi får det samme

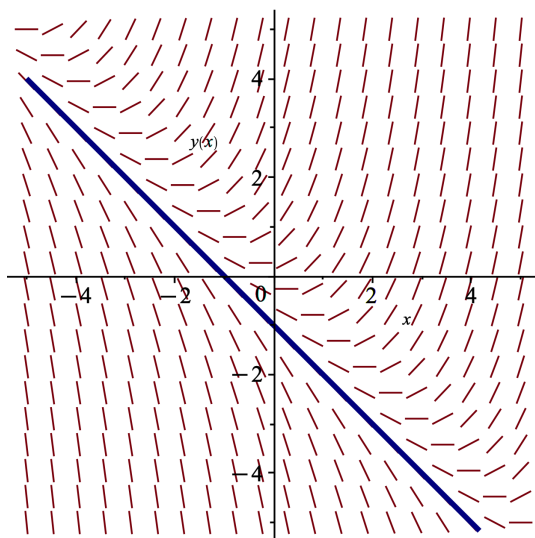
$$f'(x) = (-x - 1)' = -1$$

$$x + f(x) = x + (-x - 1) = -1$$

Dvs., at $f(x) = -x - 1$ er en løsning til $y' = x + y$

Vi tegner den ind (i princippet ved håndkraft), men du kan få Maple til at tegne løsningskurven med kommandoen vist nedenfor. Det eneste specielle er, at du skal angive et punkt på den løsningskurve, du vil have tegnet. Et oplagt punkt at vælge er $(0, -1)$, men ethvert andet punkt på linjen kan selvfølgelig også bruges. Kommandoen kræver, at du angiver dette punkt som en liste på formen $[y(0) = 1]$.

linjeelementer ($y'(x) = x + y(x)$, $y(x)$, $x = -5 \dots 5$, $y = -5 \dots 5$, $[y(0) = -1]$)



Denne linje skiller så at sige vandene: Kurverne over linjen vil alle have et minimum, mens kurverne under linjen vil være aftagende.

Desuden vil minimum for kurverne over linjen ligge på linjen med ligningen $y = -x$. Der kan argumenteres for dette således:

Af differentialligningen $y' = x + y$ ses, at hvis $y = -x$, så er $y' = 0$. Det betyder, at alle løsningskurver, der skærer linjen $y = -x$ må have vandret tangent i skæringspunktet.

Du kan få tegnet andre løsningskurver ved blot at ændre værdien af $y(0)$. Prøv!

Når kommandoen kræver den specielle liste-syntaks hænger det sammen med, at man ofte vil tegne flere løsningskurver i samme system, og således blot kan udvide listen. Her er det almindelig vis god skik at holde denne liste uden for kommandoen:

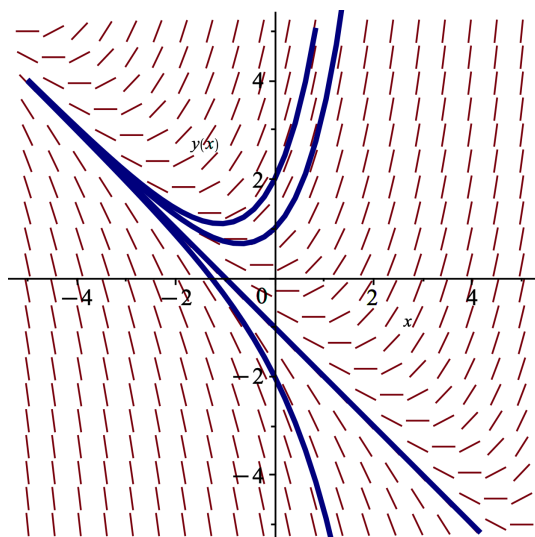
$ic := [y(0) = -1, y(0) = 1, y(0) = 2, y(0) = -2]$

$ic := [y(0) = -1, y(0) = 1, y(0) = 2, y(0) = -2]$

(3.17)

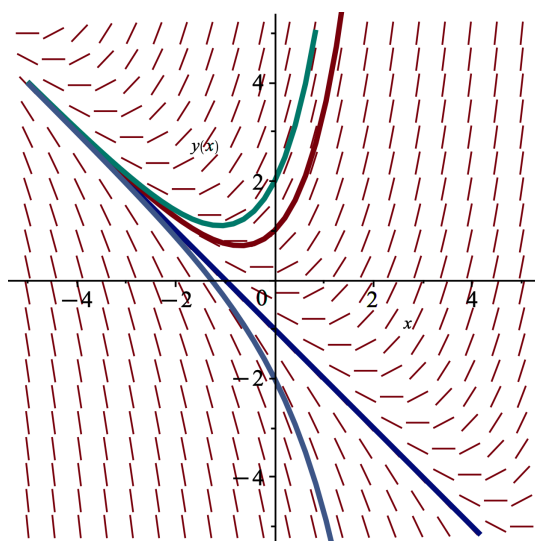
Navnet *ic* står for Initial Condition, hvilket på dansk betyder begyndelsesbetingelser.

`linjeelementer(y'(x) = x + y(x), y(x), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, ic)`



Du kan også sætte farver på de enkelte løsningskurver:

`linjeelementer(y'(x) = x + y(x), y(x), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, ic, linecolor = ["Niagara Navy", "Niagara Burgundy", "Niagara BlueGreen", "Niagara Azure"])`



Eksempel 1

For at tegne linjeelementer for en differentialligning behøver du blot et par kommandolinjer – og de er stort set de samme hver gang: Du skal selvfølgelig ændre differentialligningen, plotintervallerne og startbetingelserne.

Lad os prøve med differentialligningen $y' = x \cdot y^2$:

$$y'(x) = x \cdot y(x)^2$$

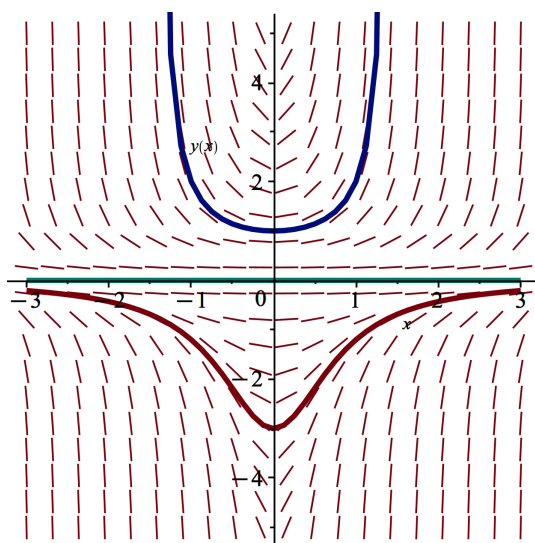
$$\frac{d}{dx} y(x) = x y(x)^2 \quad (3.18)$$

$$ic := [y(0) = 1, y(0) = -3, y(0) = 0]$$

$$ic := [y(0) = 1, y(0) = -3, y(0) = 0] \quad (3.19)$$

with(Gym) :

linjeelementer($y'(x) = x \cdot y(x)^2$, $y(x)$, $x = -3 \dots 3$, $y = -5 \dots 5$, *ic*, *linecolor* = ["Niagara Navy", "Niagara Burgundy", "Niagara BlueGreen"])



Eksempel 2

Linjeelementer for differentialligningen

$$y' = \frac{x}{y}$$

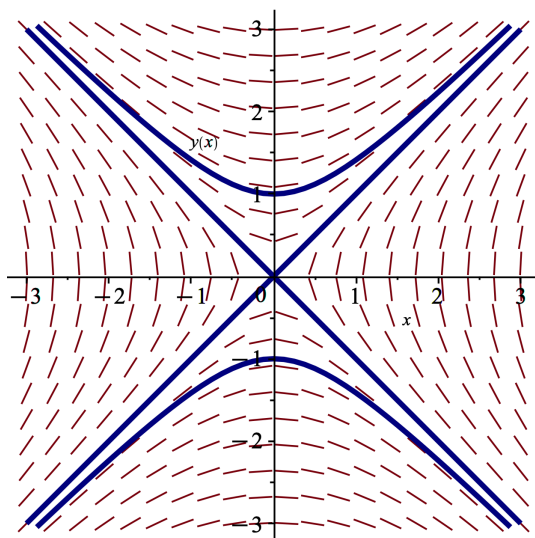
Bemærk, at vi i denne differentialligning skal forudsætte, at $y \neq 0$.

with(Gym) :

$$ic := [y(0) = 1, y(0) = -1, y(1) = 1, y(1) = -1]$$

$$ic := [y(0) = 1, y(0) = -1, y(1) = 1, y(1) = -1] \quad (3.20)$$

`linjeelementer` $\left(y'(x) = \frac{x}{y(x)}, y(x), x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, ic \right)$



Hvis du forsøger at tegne løsningskurven gennem fx $(2, 1)$, får du problemer

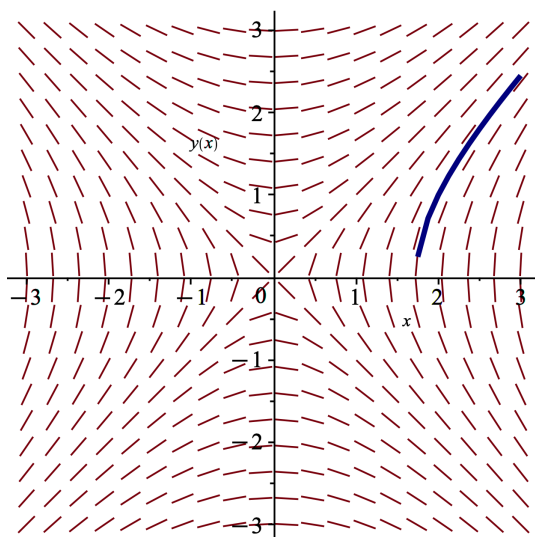
`ic := [ y(2) = 1 ]`

`ic := [y(2) = 1]`

(3.21)

`linjeelementer` $\left(y'(x) = \frac{x}{y(x)}, y(x), x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, ic \right)$

Warning, plot may be incomplete, the following error(s) were issued:
cannot evaluate the solution further left of 1.7320508, probably a singularity



Advarslen skyldes, at vi her forsøger at tegne en løsningskurve uden for det interval, hvor den er defineret. Ud fra advarslen ser det ud til, at løsningen kun er defineret i intervallet $]1.7320508, \infty[$. Desuden tegnes løsningskurven heller ikke helt ned til x -aksen. Det sidste kan nemt repareres ved at tilføje flere plotpunkter i kommandoen, men det vil nu også være rart at kunne slippe af med fejlmeddelelsen.

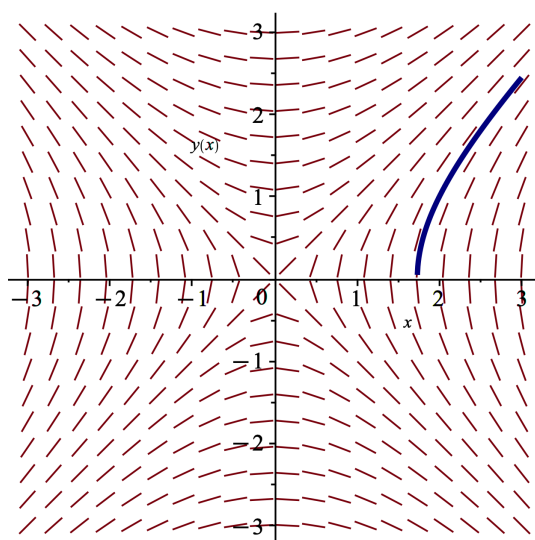
Vi kan slippe af med fejlmeddelelsen ved at sætte en intern systemvariabel, *warnlevel*, lig med 0:

interface (*warnlevel* = 0) :

OBS: Advarslen forsvinder også, hvis du genberegner linjeelement-kommandoen.

Vi øger antallet af plotpunkter

linjeelementer $\left(y'(x) = \frac{x}{y(x)}, y(x), x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, ic, numpoints = 1000 \right)$



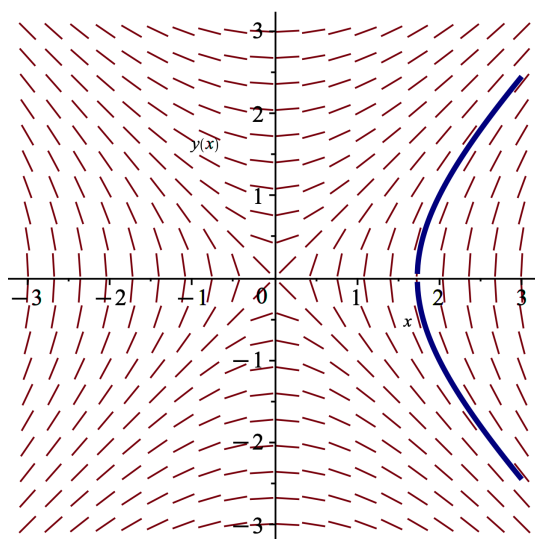
Vi tegner også løsningen gennem punktet $(2, -1)$:

ic := [*y*(2) = 1, *y*(2) = -1]

ic := [*y*(2) = 1, *y*(2) = -1]

(3.23)

linjeelementer $\left(y'(x) = \frac{x}{y(x)}, y(x), x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, ic, numpoints = 1000 \right)$

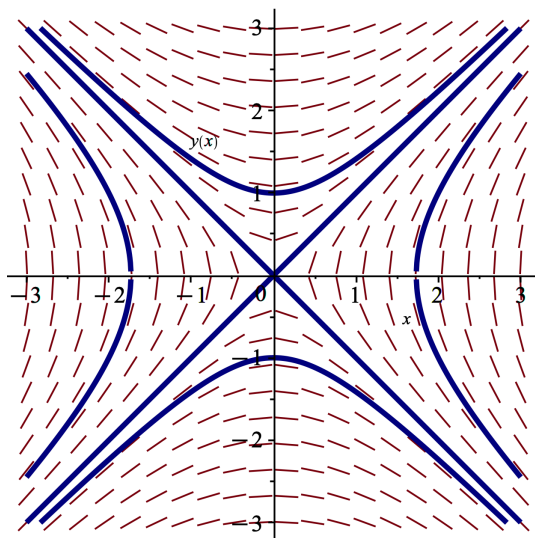


Vi kan nu få tegnet alle de mulige 'typer' af løsninger til differentialligningen

$ic := [y(0) = 1, y(0) = -1, y(1) = 1, y(1) = -1, y(2) = 1, y(2) = -1, y(-2) = 1, y(-2) =$

$ic := [y(0) = 1, y(0) = -1, y(1) = 1, y(1) = -1, y(2) = 1, y(2) = -1, y(-2) = 1, y(-2) = -1]$ (3.24)

$linjeelementer \left(y'(x) = \frac{x}{y(x)}, y(x), x = -3 \dots 3, y = -3 \dots 3, ic, numpoints = 1000 \right)$



Sæt *warnlevel* tilbage til standardværdien 3 (hvis du har ændret den):

$interface(warnlevel = 3) :$

Eksempel 3

Ved tegning af *injeelementer* for differentialligningen

$$y' = -\frac{x}{y}$$

får vi præcis de samme problemer som i eksempel 2, idet vi også her må forlange, at $y \neq 0$.

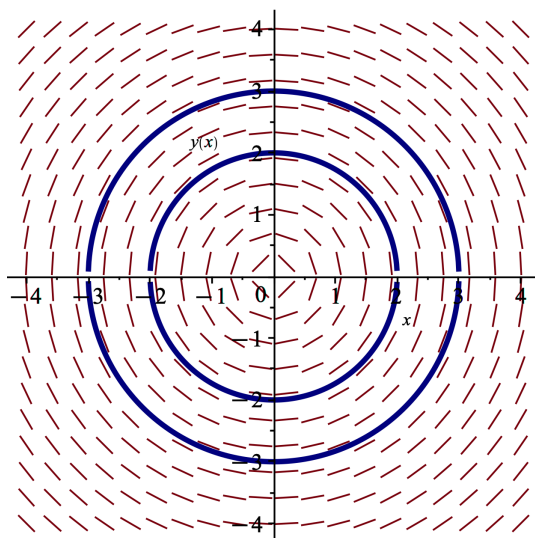
$with(Gym) :$

$interface(warnlevel = 0) :$

$ic := [y(0) = 3, y(0) = -3, y(0) = 2, y(0) = -2]$

$ic := [y(0) = 3, y(0) = -3, y(0) = 2, y(0) = -2]$ (3.25)

`linjeelementer` $\left(y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, y(x), x = -4 \dots 4, y = -4 \dots 4, ic, numpoints = 1000 \right)$



Løsningskurverne bliver her halvcirkler med centrum i $(0, 0)$. Læg mærke til, at ingen løsningskurve kan krydse x-aksen.

`interface` (`warnlevel` = 3) :

Eksempel 4

Linjeelementer for differentialligningen

$$y' = \frac{y}{x}$$

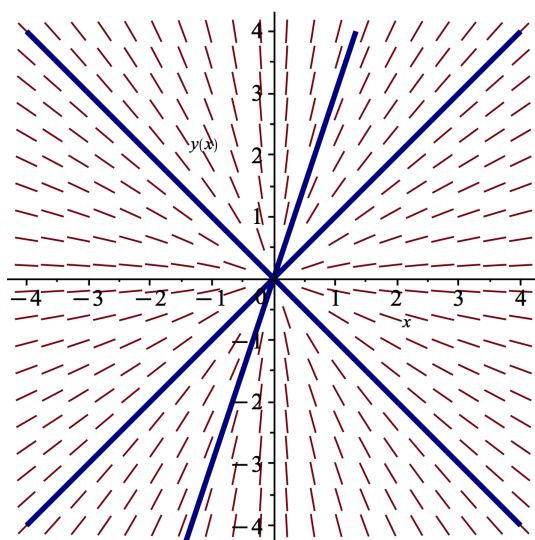
Bemærk, at vi i denne differentialligning skal forudsætte, at $x \neq 0$, så ingen løsningskurver kan skære y-aksen

`ic` := $[y(1) = 1, y(1) = 3, y(1) = -1]$

`ic` := $[y(1) = 1, y(1) = 3, y(1) = -1]$

(3.26)

$$\text{linjelementer} \left(y'(x) = \frac{y(x)}{x}, y(x), x = -4 \dots 4, y = -4 \dots 4, ic \right)$$



Her er der slet ingen problemer.

Løsningerne bliver halvlinjer ud fra $(0, 0)$.

Eksempel 5: Logistisk vækst med jagt/fiskeri

Vi skal her undersøge den logistiske vækst, her eksemplificeret ved

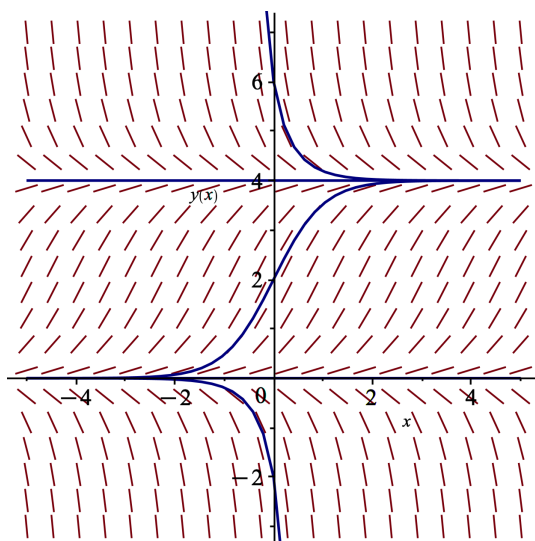
$$y' = 2y - \frac{1}{2}y^2$$

hvor y angiver populationens størrelse (målt i millioner).

Vi tegner linjelementer og indtegner nogle typiske løsningskurver.

$ic := [y(0) = 2, y(0) = 6, y(0) = 4, y(0) = -2, y(0) = 0]$:

$$\text{linjelementer} \left(y'(x) = 2y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2, y(x), x = -5 \dots 5, y = -3 \dots 7, ic \right)$$



Hvis der skal inkluderes jagt/fiskeri i modellen, kan det gøres simpelt ved at trække en konstant fra. Fx:

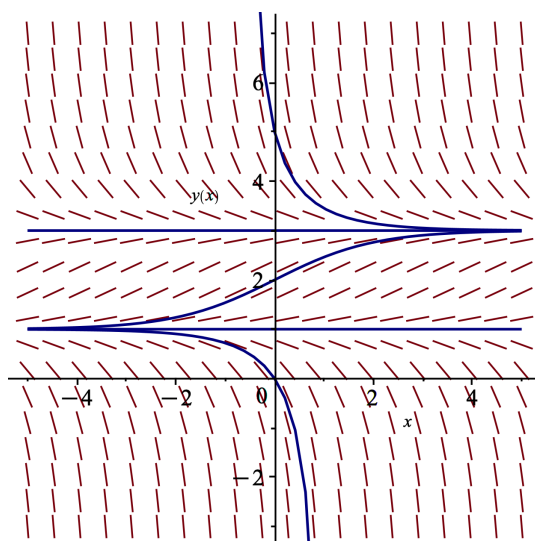
$$y' = 2y - \frac{1}{2}y^2 - a$$

konstanten repræsenterer da den hastighed, hvormed der skydes/fiskes i populationen (målt i individer pr. år).

Vi tegner nogle typiske løsningskurver for $a = \frac{3}{2}$:

$ic := [y(0) = 2, y(0) = 5, y(0) = 1, y(0) = 3, y(0) = 0]$:

$linjeelementer\left(y'(x) = 2y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2 - \frac{3}{2}, y(x), x = -5 \dots 5, y = -3 \dots 7, ic\right)$



Her ser vi igen to stationære løsninger, nemlig $y = 1$ og $y = 3$, hvor $y = 1$ er en frastødende løsning og $y = 3$ en tiltrækkende løsning, men de to stationære løsninger er kommet tættere på hinanden.

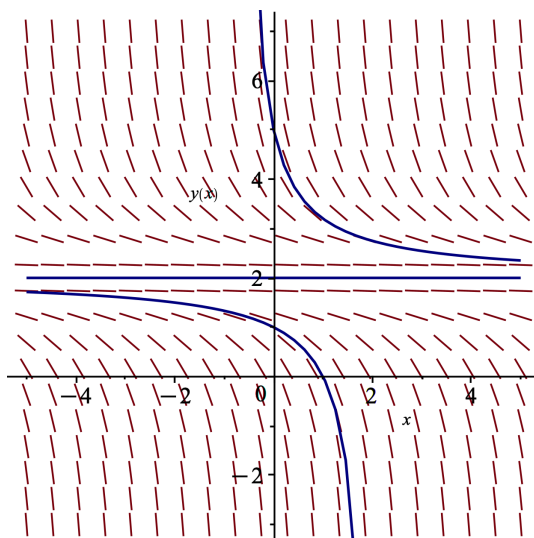
Det er nemt at overbevise sig om, at $y = 1$ og $y = 3$ er stationære løsninger, idet der for disse skal gælde, at $y' = 0$:

$$2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 1\}, \{y = 3\}$$

Ved at eksperimentere lidt, når man hurtigt frem til, at hvis vi sætter $a = 2$, så falder de to stationære løsninger sammen:

$ic := [y(0) = 2, y(0) = 5, y(0) = 1]$:

$$\text{linjeelementer} \left(y'(x) = 2y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2 - 2, y(x), x = -5 \dots 5, y = -3 \dots 7, ic \right)$$



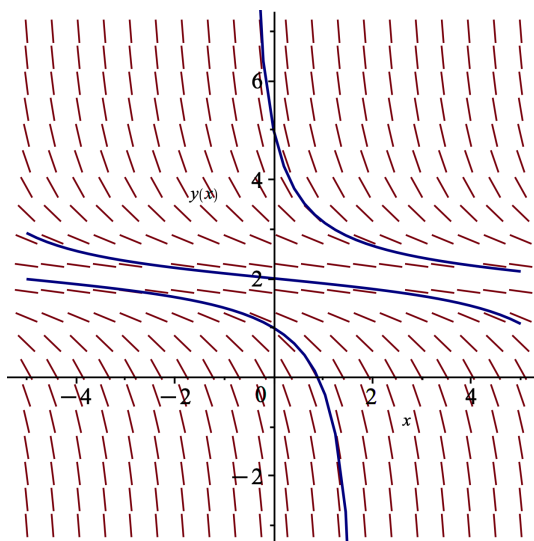
hvilket vi naturligvis også kan regne os frem til:

$$2y - \frac{1}{2}y^2 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 2\}, \{y = -2\}$$

Hvis $a > 2$ forsvinder de stationære løsninger. Det betyder, at hvis vi tillader jagt/fiskeri af mere end halvdelen af populationens maksimale størrelse (den kritiske værdi), så vil populationen uddø.

Med $a = 2.1$, vil det se sådan ud:

$$\text{linjeelementer} \left(y'(x) = 2y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2 - 2.1, y(x), x = -5 \dots 5, y = -3 \dots 7, ic \right)$$



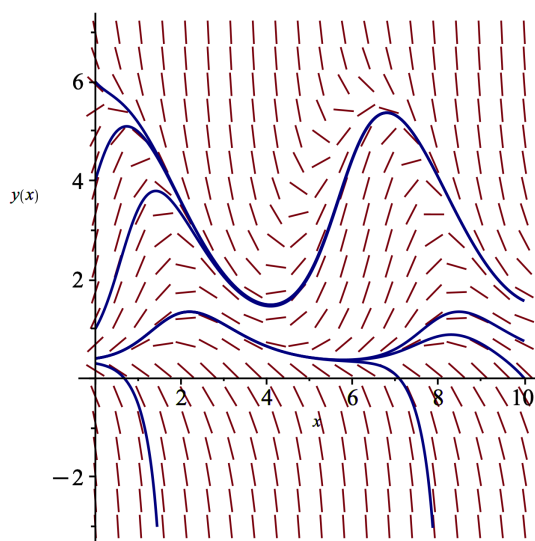
Hvis der inkluderes sæsonsvingninger i modellen kan differentialligningen fx ændres til denne

$$y' = (2 + \cos(x)) \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - a$$

Vi laver nogle løsningskurver for tilfældet $a = 1$:

$ic := [y(0) = 6, y(0) = 4, y(0) = 1, y(0) = 0.40, y(0) = 0.3, y(10) = 0, y(15) = 0] :$

$linjeelementer\left(y'(x) = (2 + \cos(x)) \cdot y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2 - 1, y(x), x = 0 \dots 10, y = -3 \dots 7, ic, \right.$
 $\left. numpoints = 1000 \right)$

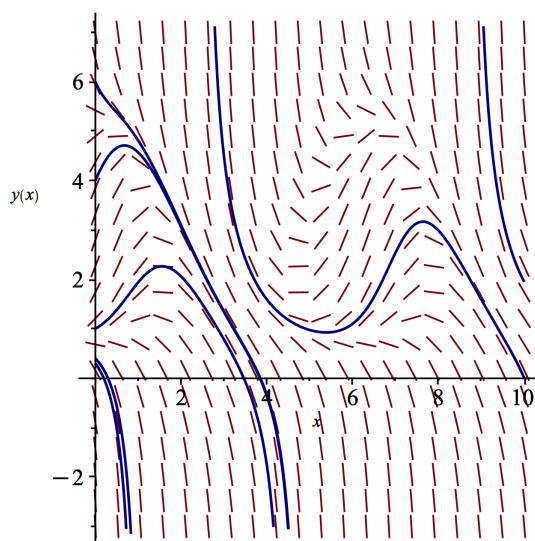


De konstante løsninger er forsvundet, men i stedet dukker nogle periodiske løsninger op, hvor den ene er tiltrækkende og den anden frastødende.

Prøver vi med $a = 2$, vil de to periodiske løsninger forsvinde (og populationen vil uddø)

$ic := [y(0) = 2, y(0) = 1, y(0) = 4, y(0) = 0.40, y(0) = 0.3, y(10) = 0, y(15) = 0, y(7) = 5] :$

$linjeelementer\left(y'(x) = (2 + \cos(x)) \cdot y(x) - \frac{1}{2}y(x)^2 - 2, y(x), x = 0 \dots 10, y = -3 \dots 7, ic, \right.$
 $\left. numpoints = 1000 \right)$



For at finde den kritiske værdi, altså den mindste værdi af a , hvor de periodiske løsninger forsvinder, kan man prøve sig frem. Vi ved jo, allerede, at den kritiske værdi ligger mellem 1 og 2.

3.8 Differentilligningsmodeller

En rygtespredningsmodel

Scenarie

En fremmed kommer til en by med 10000 indbyggere og sætter et rygte i gang. Hvordan vil rygtet spredes?

På ethvert tidspunkt under rygtespredningen vil der være tre slags personer tilstede i byen

- ignoranterne – dem, som endnu ikke har hørt rygtet
- sprederne – dem, som har hørt rygtet og fortæller det videre til alle de møder
- uinteresserede – dem, som er tidligere spreder, men nu har mistet interessen i at sprede rygtet.

Antag, at så snart en spreder videregiver rygtet til en, der allerede har hørt rygtet, bliver vedkommende uinteresseret i at sprede rygtet. Antag endvidere, at møder mellem alle tre persontyper finder sted helt tilfældigt.

Opstilling af differentialligninger

Betegn antal ignoranter med i , antal spreder med s og antal uinteresserede med u . Ændringer, der sker i i , s og u ved et møde mellem en spreder og en anden person, kan så beskrives:

En spreder møder en ignorant og videregiver rygtet:

Totalt kan der arrangeres $i \cdot s$ møder mellem en spreder og en ignorant. Hvis rygtet videregives ved et møde, vil der være en ignorant mindre og en spreder mere, altså

$$i \rightarrow i - 1, s \rightarrow s + 1.$$

En spreder møder en spreder og prøver at videregive rygtet:

Totalt kan der arrangeres $K(s, 2) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s - 1)$ møder mellem to spreder. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være to spreder mindre og to uinteresserede mere, altså

$$s \rightarrow s - 2, u \rightarrow u + 2.$$

En spreder møder en uinteresseret og prøver at videregive rygtet:

Totalt kan der arrangeres $u \cdot s$ møder mellem en spreder og en uinteresseret. Hvis rygtet forsøges videregivet ved et møde, vil der være en spreder mindre og en uinteresseret mere, altså

$$k \cdot i \cdot s - k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s - 1) - k \cdot s \cdot (10001 - i - s) \stackrel{\text{Simplify}}{=} 2 k s (i - 5000)$$

der herefter reduceres til

$$\frac{ds}{dt} = 2 k \cdot s \cdot (i - 5000)$$

Dette giver følgende differentialligningssystem til beskrivelse af rygte-spredningen

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s \\ \frac{ds}{dt} = 2 k \cdot s \cdot (i - 5000) \end{cases}$$

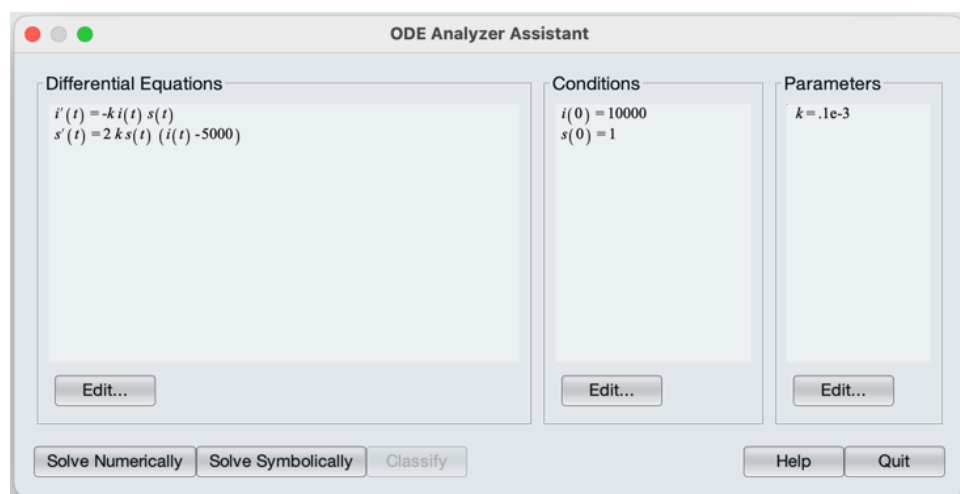
Til at begynde ($t = 0$) med er der 10.000 ignoranter og én spreder. k skal naturligvis også have en værdi. Den kan der eksperimenteres med, men sæt i første omgang $k = 0.0001$.

Løsning af differentialligningssystemet

Differentialligningerne og begyndelsesbetingelserne er nu klar til indtastning i Maple. Det nemmeste er nok at løse systemet i den interaktive solver ved at klikke på linjen nedenfor og vælge **Solve DE System** i kontekstmenuen:

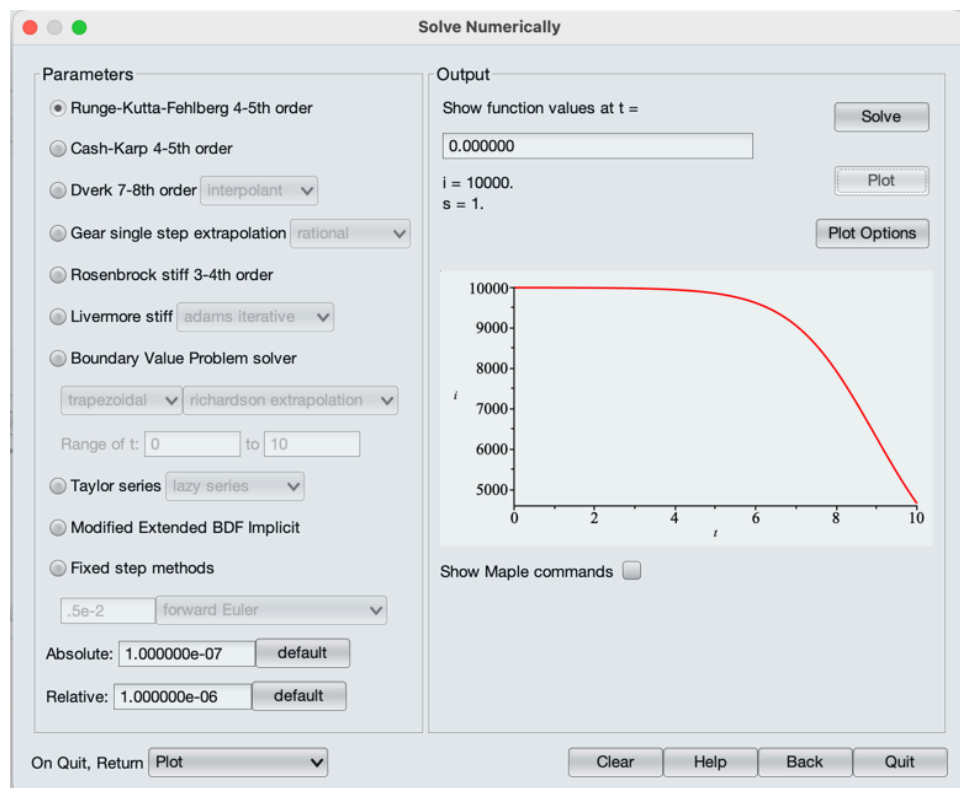
$$i'(t) = -k \cdot i(t) \cdot s(t), \quad s'(t) = 2k \cdot s(t) \cdot (i(t) - 5000)$$

Indstil ODE **Analyzer Assistant** således (husk at indsætte $k = 0.0001$ i Parameters):



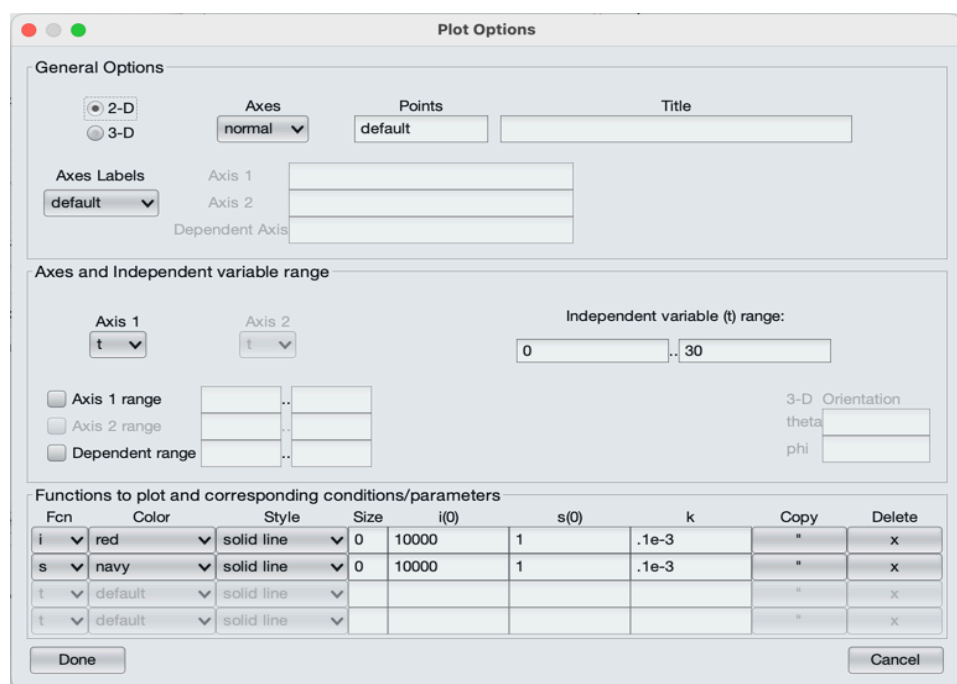
Klik på knappen **Solve Numerically**.

I det vindue, der kommer frem, klikker du på **Solve** og **Plot** - knapperne:



Vi skal have indstillet plottet, så vi får udvidet t-aksen og får vist grafen for udviklingen af sprederne sammen med grafen for udviklingen af ignoranterne.

Klik på knappen **Plot Options**:



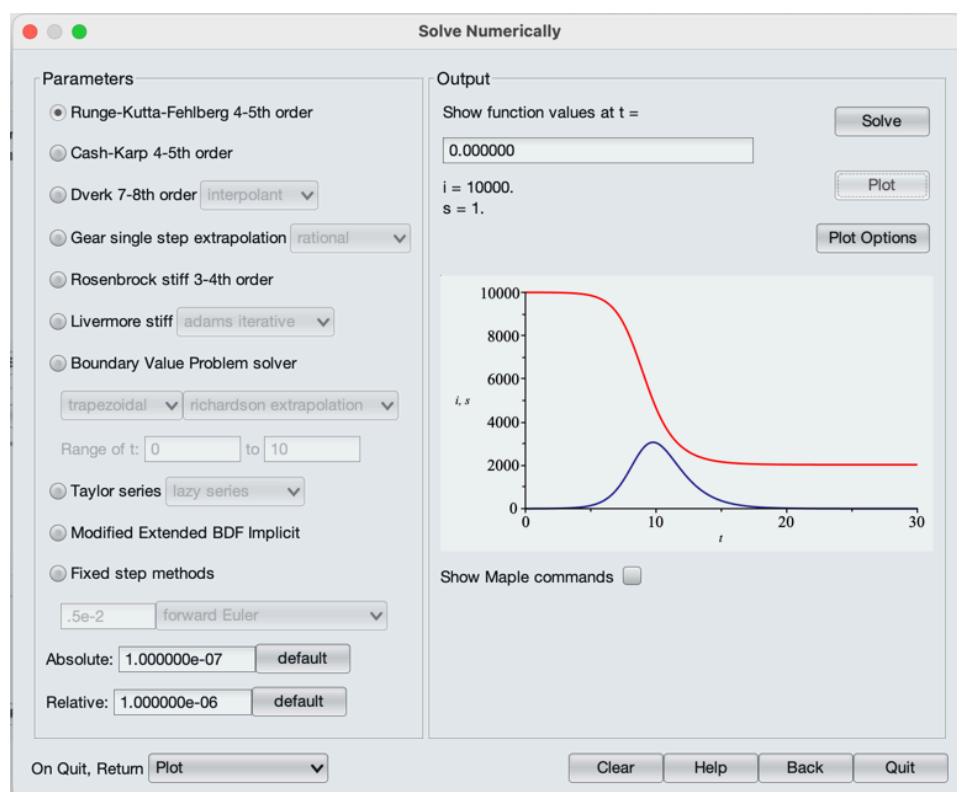
The **Plot Options** dialog box is shown. In the **General Options** section, **2-D** is selected. Under **Axes Labels**, **default** is selected. In the **Axes and Independent variable range** section, **Axis 1** is set to **t** and **Axis 2** is set to **t**. The **Independent variable (t) range** is set from **0** to **30**. In the **Functions to plot and corresponding conditions/parameters** table, a new row for **s** has been added.

Fcn	Color	Style	Size	i(0)	s(0)	k	Copy	Delete
i	red	solid line	0	10000	1	.1e-3	*	x
s	navy	solid line	0	10000	1	.1e-3	*	x
t	default	solid line					*	x
t	default	solid line					*	x

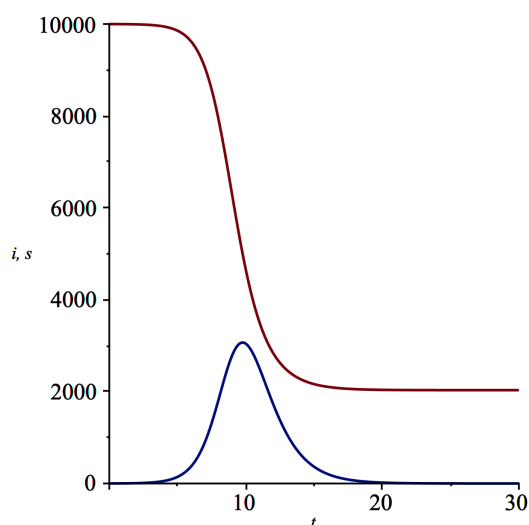
Her er 'Independent variable (t) range' ændret til at være fra 0 til 30.

Desuden er der tilføjet en plot-linje for s nederst. Det gør du ved først at trykke på 'Copy'-knappen i plot-linjen for *i*. Herved kopieres indholdet af første linje ned i linje 2, så det eneste, du herefter skal gøre, er at ændre *i* til *s*. Klik på **Done** - knappen når du er færdig.

Herefter ser det sådan efter et klik på **Plot**-knappen



Når du er helt færdig klikker du på **Quit**, hvorefter plottet vil returneres til dit Maple ark.



Af grafen for i kan vi se, at 2000 af indbyggerne aldrig vil høre rygtet.

Grafen for s tyder på, at antallet af spredere topper når halvdelen af indbyggerne (5000) i byen har hørt rygtet. Dette kan vi nemt overbevise os om ved at differentilligningen:

Når s topper, er $\frac{ds}{dt} = 0$. Heraf følger så, at

$$2k \cdot s \cdot (i - 5000) = 0 \Rightarrow i = 5000$$

Løsning med kommandoer:

Differentialligningssystemet kan også løses direkte ved hjælp af kommandoer, men det kræver en hel del.

$$\text{diffeq} := i'(t) = -k \cdot i(t) \cdot s(t), s'(t) = 2k \cdot s(t) \cdot (i(t) - 5000) :$$

$$\text{sol} := \text{dsolve}([\text{diffeq}, i(0) = 10000, s(0) = 1], \text{numeric}, \text{parameters} = [k]);$$

$$\text{sol} := \text{proc}(x_{rkf45}) \dots \text{end proc} \quad (3.27)$$

$$\text{sol}(\text{parameters} = [k = 0.0001])$$

$$[k = 0.0001] \quad (3.28)$$

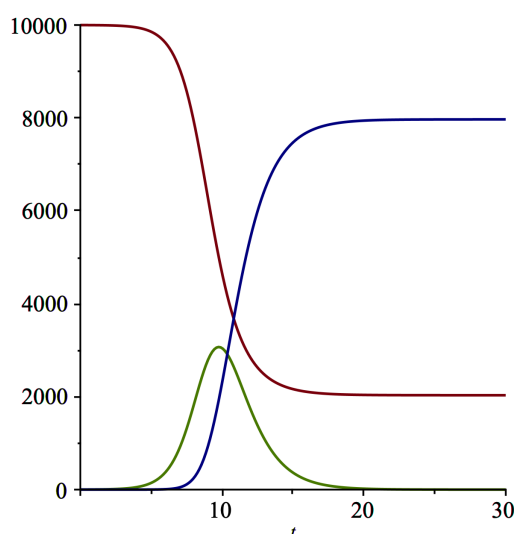
Vi kan herefter benytte proceduren sol til at beregne værdier for de to funktioner i og s . Fx er

$$\text{sol}(10) = [t = 10., i(t) = 4652.92109716330, s(t) = 3044.25803464761]$$

der viser, at der til tidspunktet $t = 10$ er 4652 ignoranter og 3044 spredere. Umiddelbart vil det være meget besværligt at skulle tegne grafer ud fra dette, men heldigvis har Maple en kommando med navnet odeplot til at klare dette. Kommandoen ligger i en speciel pakke med navnet plots , så denne skal indlæses først:

$\text{with}(\text{plots}) :$

$$\text{odeplot}(\text{sol}, [[t, i(t), \text{color} = \text{"Burgundy"}], [t, s(t), \text{color} = \text{"LeafGreen"}], [t, 10001 - s(t) - i(t), \text{color} = \text{"Navy"}]], 0..30)$$



Her er desuden tegnet grafen for udviklingen af de uinteresserede, der jo kan udtrykkes således: $u(t) = 10001 - s(t) - i(t)$

En rov- byttedyr model

Scenarie og differentialligninger

På en ø, hvor der er gulerødder nok, udsættes x kaniner og y ræve. Hvis der ingen ræve var tilstede, ville ændringen i kaninbestanden kunne beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x, \quad a > 0$$

— dvs, en eksponentiel vækst.

Var der ingen kaniner tilstede, ville ændringen i rævebestanden kunne beskrives ved

$$\frac{dy}{dt} = -c \cdot y, \quad c > 0$$

— dvs, rævene vil uddø eksponentielt.

Nu er der heldigvis både kaniner og ræve til stede. Tilstedeværelsen af ræve vil begrænse kaninbestandens vækst og tilstedeværelsen af kaniner vil sikre, at rævene ikke dør af sult. Som model til beskrivelse af denne vekselvirkning opstillede Lotka og Volterra i 1925 følgende model:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y \end{cases}$$

hvor a , b , c og d er positive konstanter.

I disse differentialligninger kan faktoren $x \cdot y$ tolkes som antallet af møder, der kan etableres mellem ræve og kaniner (kaninen kan vælges på x måder og uafhængigt heraf kan ræven på y måder). Ved et møde mellem en ræv og en kanin er der en vis sandsynlighed for, at kaninen bliver ædt, hvorved kaninbestanden falder. På den anden side kan et møde mellem ræv og en kanin sikre overlevelse af en ræv.

Sæt $a = 0.5$, $b = 0.03$, $c = 0.5$ og $d = 0.01$, og antag der fra starten af er 50 kaniner og 10 ræve. Differentialligningerne bliver da

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.5 \cdot x - 0.03 \cdot x \cdot y \\ \frac{dy}{dt} = -0.5 \cdot y + 0.01 \cdot x \cdot y \end{cases}$$

`diffeq := x'(t) = 0.5 x(t) - 0.03 x(t) · y(t), y'(t) = -0.5 y(t) + 0.01 x(t) · y(t)`

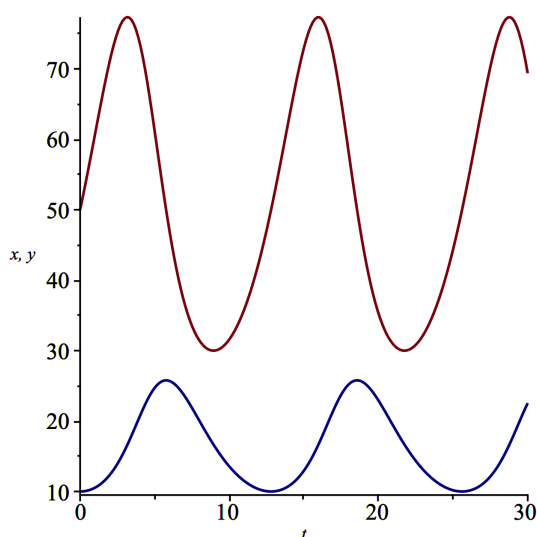
`diffeq := D(x)(t) = 0.5 x(t) - 0.03 x(t) y(t), D(y)(t) = -0.5 y(t) + 0.01 x(t) y(t)` (3.29)

`sol := dsolve({diffeq, x(0) = 50, y(0) = 10}, numeric);`

`sol := proc(x_rkf45) ... end proc` (3.30)

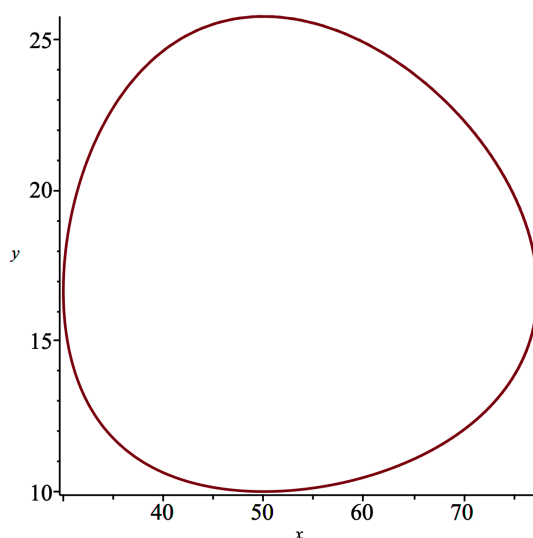
`with(plots):`

`odeplot(sol, [[t, x(t), color = "Burgundy"], [t, y(t), color = "Navy"]], 0..30);`



Vi kan også nemt lave et såkaldt faseplot, hvor vi har antallet af kaniner på x -aksen og antallet af ræve på y -aksen:

`odeplot(sol, [x(t), y(t), color = "Burgundy"], 0..30)`



Eksperimenter med begyndelsesbetingelserne og værdierne af a , b , c og d .

En epidemi model

Scenarie og differentialligninger

Spredningen af en smitsom sygdom som fx røde hunde, hvor man bliver immun for fremtidig smitte så snart man er kommet sig over sygdommen, kan beskrives ved differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -a \cdot r \cdot s \\ \frac{ds}{dt} = a \cdot r \cdot s - b \cdot s \end{cases}$$

hvor r er antallet af raske på dag t , og s er antallet af syge på dag t .

Denne model følger næsten opbygningen af rygtespredningsmodellen. Her er $r \cdot s$ antallet af møder, der kan etableres mellem raske og smittede – og kun ved møder mellem raske og smittede kan smitten viderebringes. Den første differentialligning udtrykker derfor, at hastigheden, hvormed antallet af raske aftager, er proportional med antallet af møder, der kan etableres mellem raske og smittede.

Ændringen i antallet af smittede i et givet tidsrum er ikke blot afhængig af, hvor mange der er blevet smittet i dette tidsrum, men også af, hvor mange der er blevet immune i dette tidsrum. Vi antager, at den hastighed, hvormed immunitet indtræffer er proportional med antallet af smittede – altså lig med $b \cdot s$, hvor b er proportionalitetskonstanten. Hermed har vi den anden differentialligning.

Sæt $a = 0.00002$ og $b = 0.1$, og lad begyndelsesbetingelserne være som i rygtespredningsmodellen: $r(0) = 10000$ og $s(0) = 1$.

`diffEq := r'(t) = -0.00002 r(t) · s(t), s'(t) = 0.00002 r(t) · s(t) - 0.1 · s(t)`

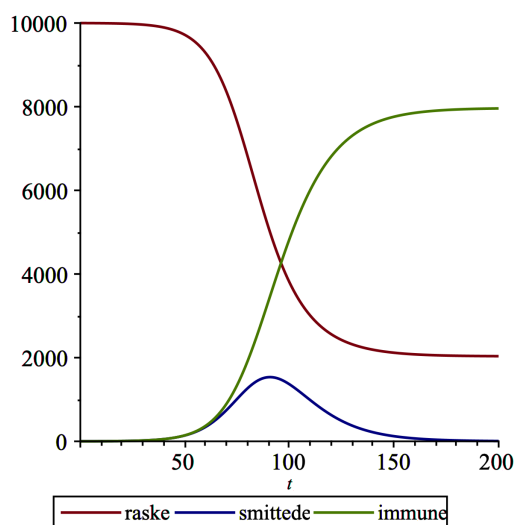
$$\text{diffEq} := D(r)(t) = -0.00002 r(t) s(t), D(s)(t) = 0.00002 r(t) s(t) - 0.1 s(t) \quad (3.31)$$

`sol := dsolve({diffEq, r(0) = 10000, s(0) = 1}, numeric);`

$$\text{sol} := \text{proc}(x_rkf45) \dots \text{end proc} \quad (3.32)$$

`with(plots):`

`odeplot(sol, [[t, r(t), color = "Burgundy"], [t, s(t), color = "Navy"], [t, 10001 - r(t) - s(t), color = "LeafGreen"]], 0 .. 200, legend = ["raske", "smittede", "immune"], size = [300, 300]);`



Igen ser vi, at 2000 ikke vil blive smittet og at antallet af smittede er størst netop når halvdelen er smittede eller immune.

4 Vektorregning

4.1 Gym-pakken

with(Gym) :

I Gym-pakken er der en række funktioner, der gør arbejdet med vektorer mere bekvemt:

navn	syntaks	handling
arealP	$arealP(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner arealet af det parallelogram der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$
arealT	$arealT(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner arealet af den trekant der er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$
cart2pol	$pol2cart(\vec{a})$	Beregner $\vec{a}$'s polære koordinater
determinant	$determinatn(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner determinanten af vektorparret $\vec{a}$ og $\vec{b}$
dotP	$dotP(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner skalarproduktet af vektorparret $\vec{a}$ og $\vec{b}$ OBS: Skalarproduktet mellem to vektorer kan udregnes som $\vec{a} \cdot \vec{b}$, men denne implementation benytter det komplekse skalarprodukt, og kan give utilsigtede resultater i symbolske beregninger.
enhedsvektor	$enhedsvektor(\vec{a})$	Beregner en enhedsvektor ensrettet med $\vec{a}$
tværvektor	$tværvektor(\vec{a})$	Beregner tværvektoren til $\vec{a}$
længde	$længde(\vec{a})$	Beregner længden af $\vec{a}$
pol2cart	$cart2pol([r, v])$	Beregner de cartesiske koordinater til en vektor med de polære koordinater $[r, v]$.
projektion	$projektion(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$
vinkel	$vinkel(\vec{a}, \vec{b})$	Beregner vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

I det sidste afsnit er forklaret, hvordan de enkelte kommandoer fungerer sammen med kontekstmenuen.

4.2 Indtastning af vektorer

Du taster nemmest en vektor ind i Maple vha. ulighedstegnene: < og >. Fx vil

$$a := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

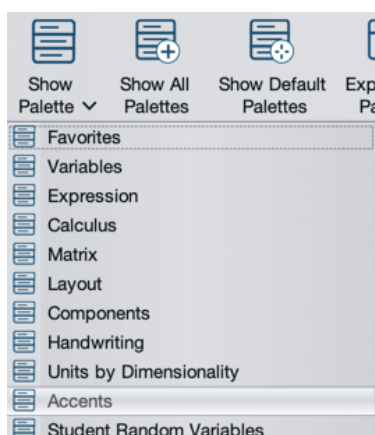
definere en vektor med navnet a og koordinaterne $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Vil du have pile over vektorerne, så er det også muligt. Der er 3 muligheder:

Accent-paletten

Du får fat i **Accents**-paletten således (det skal du kun gøre én gang):

Åbn fanebladet **Tools**. Klik på ikonen **Show Palette** og vælg **Accents** i listen (kun et udsnit er vist):



Herefter vil du se paletten **Accents** nederst i listen over paletter i venstre side af skærmen:



Når du skal skrive en vektor med denne skabelon, trykker du først på vektorsymbolet $\vec{A}$, og skabelonen indsættes. Skriv herefter vektorens navn – du slipper ud af vektorsymbolet ved at taste pil-højre. Fx

$$\vec{a} := \langle 4, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

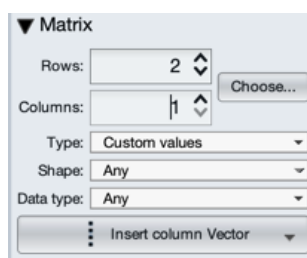
OBS:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ defineret ovenfor og vektoren $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ har intet med hinanden at gøre. Det er to forskellige vektorer.

Så, hvis du vil bruge vektorpile, så skal du gøre det konsekvent.

Matrix-paletten

Som alternativ til $\langle \rangle$ i forbindelse med indtastning af en vektor, kan du benytte **Matrix**-paletten, hvor indstillingen skal være som vist her:



Tryk på **Insert column Vector**, og du får en vektor skabelon som denne $\begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \end{bmatrix}$. $\vec{a}$ kan så defineres således:

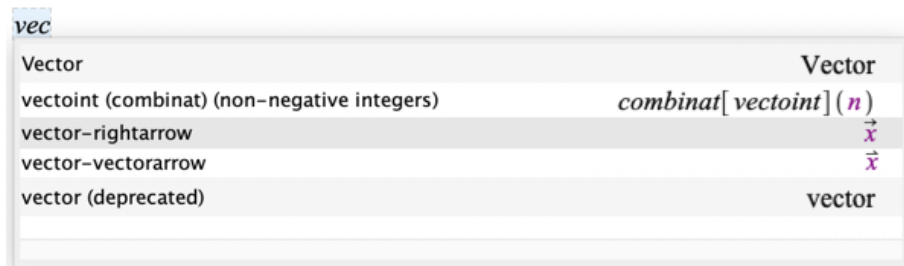
$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Command-Completion

Her kan du få en vektorskabelon frem uden at skulle have fat i musen.

Du gør sådan her:

I en Math-mode taster du *vec* og derefter ESC. så får disse valgmuligheder, hvor du skal vælge den anden på listen: *vector-rightarrow*



Du kan spare en masse tastearbejde ved at gøre det til en vane at benytte 'command-completion' – også til alle mulige andre kommandoer.

OBS: Når du taster, vil en tooltip poppe op, når Maple kan identificere, hvad du er i gang med at skrive.



Tast ESC, når du ser et tooltipet, så vil du få en liste at vælge fra – ellers vil den fulde kommando blive indsat, hvis tooltipet er entydigt (her kan tasten TAB også benyttes).

4.3 Regning med vektorer

Regning med vektorer går helt som forventet

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -4, 5 \rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Skal du have fat i en af koordinaterne for $\vec{a}$, fx $\vec{a}_1$, så skriver du på en pc indekset med Ctrl+(Shift)+_ (du skal have 3 taster i sving for at lave indekset: Hold Ctrl og Shift nede samtidigt og tryk på _ tasten). På en mac taster du i stedet cmd+alt+B. Sørg for, at indekset står uden for vektorpilen:

$$\vec{a}_1 = 2$$

Alternativt kan du bruge skabelonen $\vec{a}_n$ i **Expression** paletten til at lave vektor indeks med – og det skal være den skabelon, der har et grønt a og et rødt n.

Du kan naturligvis også arbejde med symbolske vektorer. Og her skal du passe på, hvis du ikke sætter pile over dine vektorer.

Derfor: Sæt altid pil over dine vektorer

cirkulær reference – læs kun, hvis du ikke bruger pile over vektorerne

Du kan ikke definere en vektor v ved $v := \langle v_1, v_2 \rangle$, hvor v_1 er skrevet med et indeks (som beskrevet ovenfor). Dette vil nemlig give en cirkulær reference (der står jo, at v 's førstekoordinat er v_1 – altså v 's førstekoordinat)

$$v := \langle v_1, v_2 \rangle$$

Error, recursive assignment

Derimod kan du godt skrive $v := \langle v_1, v_2 \rangle$, hvis du benytter et såkaldt 'literal index'. Her skal du indtaste indeks som $v_{_}$ (altså dobbelt understreg). Du kan også benytte skabelonen: $\vec{a}_n$ – her skal det være den, hvor både a og n er røde.

$$v := \langle v_1, v_2 \rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Det er også helt fint at definere en vektor ved $\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle$ – hvad enten du skriver indeks på den ene eller den anden måde.

Her med *vektorindeks*

$$\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

og her med *literal index* – læg mærke til, at indeks på u i resultatet er kursiverede

$$\vec{u} := \langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

4.4 Punkter og stedvektorer

Det er bekvemt at beskrive punkter ved lister $A = [a_1, a_2]$.

Punktets stedvektor $\overrightarrow{OA} = \langle a_1, a_2 \rangle$ kan da fastlægges som $\overrightarrow{OA} = \langle A \rangle$.

Har du givet to punkter ved $A = (4, 7)$ og $B = (10, 2)$, kan disse defineres i Maple ved

$$A := [4, 7] = [4, 7]$$

$$B := [10, 2] = [10, 2]$$

de tilhørende stedvektorer fastlægges ved

$$\overrightarrow{OA} := \langle A \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} := \langle B \rangle = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ kan bestemmes ved (husk, at det er B 's koordinater minus A 's koordinater):

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Du kan også let finde fx midtpunktet M af linjestykket AB på denne måde:

$$\overrightarrow{OM} := \frac{1}{2} \cdot \langle A + B \rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

OBS: Ofte vil du få flere punkter i spil, og vil du definere punktet D eller O , så får du problemer

$$D := [5, 6]$$

Error, attempting to assign to `D` which is protected. Try declaring `local D`; see ?protect for details.

Fejlmeddelelsen fortæller, at D er et beskyttet bogstav – det benyttes i forbindelse med differentialregning. Du redder dette ved at definere en lokal udgave af D :

$$\text{local } D := [5, 6]$$

Warning, A new binding for the name `D` has been created. The global instance of this name is still accessible using the $:-$ prefix, $:-D$. See ?protect for details.

$$D := [5, 6] \tag{4.1}$$

(local D skal skrives i math-mode, selvom det måske ikke ser sådan ud. local bliver automatisk skrevet med fed skrift)

Hvis du genberegner linjen med local D , så forsvinder advarslen.

$$\overrightarrow{OD} := \langle D \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Alternativt kan du fjerne beskyttelsen på D med kommandoen

`unprotect('D')`

Du skal dog være forsigtig her, da du siden kan få problemer med at differentiere – det er nemlig hertil D benyttes. Så, hvis du i en opgave fjerner beskyttelsen på D, så skal du benytte kommandoen `restart`, inden du starter på næste opgave.

4.5 Længden af en vektor

Længden af en vektor beregnes vha. funktionen `len`, der findes i Gym-pakken. Her er et par eksempler på, hvordan den virker (husk, Gym-pakken skal være indlæst)

`with(Gym) :`

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{længde}(\vec{a}) = \sqrt{13}$$

$$\text{længde}(\langle x, y \rangle) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

OBS

Det giver ikke mening at udregne

$|\vec{a}|$ i Maple.

4.6 Polære koordinater

De polære koordinater for en vektor $\vec{v}$ er en liste $[r, u]$, hvor r er længden af $\vec{v}$ og u er vinklen fra x -aksen til $\vec{v}$ (regnet med fortegn). Naturligvis benytter vi den repræsentant for $\vec{v}$, der er placeret som en stedvektor.

Læg mærke til, at vi bruger samme notation til polære koordinater som vi bruger til punkters koordinater – det er konteksten, der afgør, hvad der menes i en given sammenhæng.

Det er ganske simpelt at omregne fra rektangulære koordinater (cartesiske koordinater) til polære koordinater (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

`with(Gym) :`

$$\vec{v} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{cart2pol}(\vec{v}) = [\sqrt{13}, 56.309]$$

Dette viser, at længden af $\vec{v}$ er $\sqrt{13}$ og at $\vec{v}$ danner en vinkel på 56.3° med x -aksen.

Vi kan selvfølgelig også gå den anden vej: Hvis vi kender de polære koordinater $P = [r, u]$, og skal bestemme de sædvanlige rektangulære koordinater (cartesiske koordinater). Fx, hvis

$$P := [2, 60] = [2, 60]$$

så bestemmes de cartesiske koordinater ved

$$\text{pol2cart}(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

4.7 Enhedsvektor

Hvis $\vec{a}$ er en egentlig vektor, er $|\vec{a}| \neq 0$, så det giver mening at se på vektoren $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$, der er en enhedsvektor ensrettet med $\vec{a}$. Er

$$\text{fx } \vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

så er

$$\frac{1}{\text{længde}(\vec{a})} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

I Gym-pakken er en funktion, der klarer dette. Denne hedder *enhedsvektor* (eller blot *ev*), og fungerer således (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

$$\text{enhedsvektor}(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

Lad os for en godt ordens skyld tjekke, at denne vektor har længden 1:

$$\text{længde}\left(\left\langle \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle\right) = 1$$

4.8 Skalarprodukt

Skalarproduktet mellem to vektorer i Maple udregnes når du taster `.` (punktum) mellem de to vektorer:

$$\vec{a} := \langle 3, 4 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 5, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 23$$

Alternativt kan du benytte 'skalarprikken', der findes i **Common Symbols**-paletten. Vælger du at bruge denne, vil det være en god ide at tilføje den til **Favorites**-paletten (højreklik på symbolet og vælg 'Add to Favourites Palette'). Med skalarprikken ser det sådan ud – og det virker på nøjagtig samme måde som punktum notationen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 23$$

Du kan selvfølgelig også regne med symbolske koordinater – dog ikke helt uproblematisk

$$\vec{a} := \langle 2\,t, 5 \rangle = \begin{bmatrix} 2\,t \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 5, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 + 10\,t$$

Problemet er, at Maple arbejder med de komplekse tal, hvor du skal arbejde med de reelle tal. I Gym-pakken finder du en funktion, der løser dette problem (husk, at Gym-pakken skal være indlæst):

$$\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = 10 + 10\,t$$

– så brug punktum-notationen eller skalarprikken, hvis du arbejder med konkrete (tal) koordinater – *dotP*, hvis der er en eller flere symbolske koordinater.

Du kan naturligvis også vælge at bruge *dotP* i begge tilfælde, men det kræver, at Gym-pakken er indlæst (det gør punktum-notationen og skalarprikken ikke).

Eksempel - ortogonale vektorer

Bestem tallet t , således at vektorerne $\vec{a} = \langle 1, 2\,t + 1 \rangle$ og $\vec{b} = \langle t, -10 \rangle$ er ortogonale:

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle 1, 2\,t + 1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,t + 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle t, -10 \rangle = \begin{bmatrix} t \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}(\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = 0, t)$$

$$-\frac{10}{19} \tag{4.2}$$

Dvs., at for $t = -\frac{10}{19}$ er vektorerne ortogonale.

4.9 Vinkel mellem to vektorer

Det er ganske nemt at finde vinklen mellem to vektorer vha. formen: $\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Hvis fx $\vec{a} = \langle 1, 7 \rangle$ og $\vec{b} = \langle -3, 4 \rangle$, bestemmes vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ således:

$$\vec{a} := \langle 1, 7 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle -3, 4 \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

`unassign('v')`

(v renses her, da den har en værdi fra tidligere)

Indlæs Gym-pakken (hvis du ikke allerede har den indlæst) for at kunne benytte `Cos` til at få en løsning i grader:

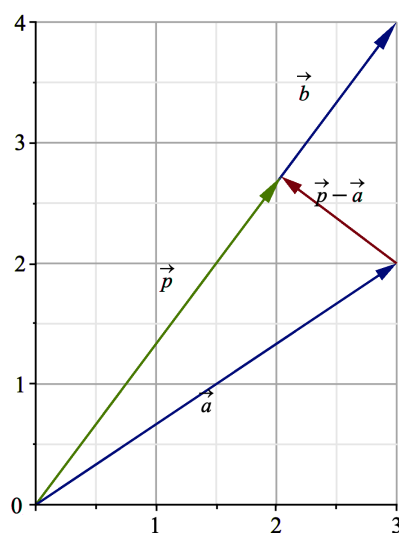
$$\text{Cos}(v) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\text{længde}(\vec{a}) \cdot \text{længde}(\vec{b})} \right) \xrightarrow{\text{solve for } v} [[v = 45.00000000]]$$

I Gym-pakken finder du funktionen `vinkel`, der automatiserer beregningen:

$$\text{vinkel}(\vec{a}, \vec{b}) = 45.$$

4.10 Projektion af vektor på vektor

På figuren nedenfor er $\vec{p}$ den vinkelrette projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



$$\vec{p} \text{ kan beregnes vha. formen } \vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Lad os se, hvordan det fungerer i et eksempel:

Find projektionen af $\vec{a} = \langle 3, 2 \rangle$ på $\vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$.

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle 3, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3, 4 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p} := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\text{længde}(\vec{b})^2} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{51}{25} \\ \frac{68}{25} \end{bmatrix}$$

Det kan være meget bekvemt at få automatiseret projektionen af en vektor på en vektor. Det klarer funktionen *projektion*, der findes i Gym-pakken:

$$\text{proj}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} \frac{51}{25} \\ \frac{68}{25} \end{bmatrix}$$

- og projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ finder du således:

$$\text{proj}(\vec{b}, \vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{51}{13} \\ \frac{34}{13} \end{bmatrix}$$

4.11 Tværvektor

Tværvektorbegrebet findes ikke i Maple – det findes faktisk kun i det danske gymnasium. I Gym-pakken er tværvektor implementeret som funktionen *hat*, og virker sådan her (husk, Gym-pakken skal være indlæst):

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{tværvektor}(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

OBS:

Du kan skrive symbolet for en tværvektor med **Accents**-paletten. Her skal du benytte skabelonen nederst til højre (med tooltip: 'hat over') .

Du kan fx bruge symbolet sådan her:

$$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a} := \text{tværvektor}(\vec{a}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hvis du ikke har **Accents**-paletten, så gå til fanebladet Palettes og klik på **Show Palette**. Vælg **Accents** i den liste, der kommer frem.

4.12 Determinant

Determinant er indbygget i Maple, men ikke helt gearet til vores brug. Derfor 'redefineres' den i Gym-pakken.

Den hedder *determinant*, og virker helt som forventet (husk, at Gym-pakken skal være indlæst):

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle 4, -1 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3, -2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{determinant}(\vec{a}, \vec{b}) = -5$$

Du kan naturligvis også bruge definitionen direkte:

$$\text{tværvektor}(\vec{a}) \cdot \vec{b} = -5$$

Eksempel: Brug af determinant

Der er for ethvert t givet to vektorer ved $\vec{a} = \langle t - 2, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 3t - 1, 2 + t \rangle$.

Undersøg om der findes værdier af t for hvilke de to vektorer er parallelle.

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle t - 2, 2 \rangle = \begin{bmatrix} t - 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3t - 1, 2 + t \rangle = \begin{bmatrix} 3t - 1 \\ 2 + t \end{bmatrix}$$

$$\text{determinant}(\vec{a}, \vec{b}) = -6t + 2 + (t - 2)(2 + t)$$

$$\text{solve}(\text{determinant}(\vec{a}, \vec{b}) = 0, t)$$

$$3 + \sqrt{11}, 3 - \sqrt{11} \quad (4.3)$$

Heraf ses, at de $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, når $t = 3 + \sqrt{11}$ eller $t = 3 - \sqrt{11}$.

4.13 Areal

I Gym-pakken er implementeret to funktioner *arealP*, der beregner arealet af et parallelogram, og *arealT*, der beregner arealet af en trekant udspændt af to vektorer.

Arealfunktionerne virker helt som forventet (husk, at Gym-pakken skal være indlæst):

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle 4, -1 \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3, -2 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{arealP}(\vec{a}, \vec{b}) = 5$$

$$\text{arealT}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5}{2}$$

Eksempel: Brug af arealT

Der er for ethvert t givet to vektorer ved $\vec{a} = \langle t - 2, 2 \rangle$ og $\vec{b} = \langle 3t - 1, 2 + t \rangle$.

Undersøg om der findes værdier af t for hvilke trekanten, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, har arealet 2.

with(Gym) :

$$\vec{a} := \langle t - 2, 2 \rangle = \begin{bmatrix} t - 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} := \langle 3t - 1, 2 + t \rangle = \begin{bmatrix} 3t - 1 \\ 2 + t \end{bmatrix}$$

$$\text{arealT}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{(-6t + 2 + (t - 2)(2 + t))^2}}{2}$$

$$\text{solve}(\text{arealT}(\vec{a}, \vec{b}) = 2, t)$$

$$3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{15}, 3 + \sqrt{15} \quad (4.4)$$

For ovenstående værdier af t , har trekanten, der udspringes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, arealet 2.

4.14 Brug af kontekstmenuen

Alle Gym-pakkens kommandoer er tilgængelige fra kontekstmenuen. Så snart markøren placeres på en vektor eller et par af vektorer (adskilt af komma), vil Gym-knappen komme frem i kontekstmenuen.

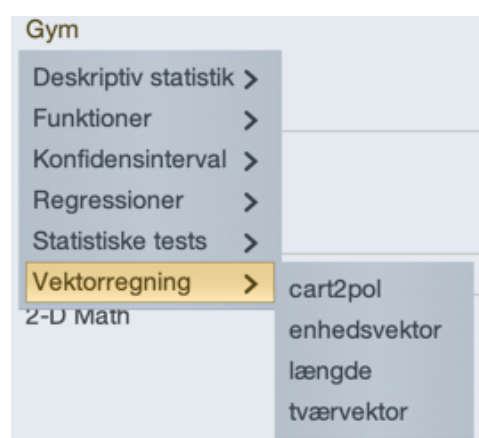
For at se dette, indlæser vi først Gym-pakken og definerer to vektorer:

$\text{with}(\text{Gym}) :$

$\vec{a} := \langle 2, 3 \rangle :$

$\vec{b} := \langle -2, 4 \rangle :$

Klikker vi på én vektor, ses denne menu, der indeholder det, man kan gøre ved en enkelt vektor:



Klikker vi på et par af vektorer, ses denne menu:

$\vec{a}, \vec{b}$



Eksempler med én vektor:

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{længde}} \sqrt{13}$$

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{enhedsvektor}} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{tværvektor}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{cart2pol}} [\sqrt{13}, 56.309]$$

Der er blot én kommando *pol2cart*, vi ikke har set, men det skyldes, at man her skal klikke på en liste med 2 elementer

$$[5, 60] \xrightarrow{\text{pol2cart}} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Eksempler med to vektorer

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{vinkel}} 60.25511873$$

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{dotP}} 8$$

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{determinant}} 14$$

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{projektion}} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{arealP}} 14$$

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\text{arealI}} 7$$

Alle kommandoer virker også med de aktuelle koordinater indsat. Fx

$$\langle -3, 5 \rangle \xrightarrow{\text{længde}} \sqrt{34}$$

$$\langle 4, 5 \rangle, \langle -3, -7 \rangle \xrightarrow{\text{vinkel}} 164.5387823$$

5 Analytisk geometri 1 2D

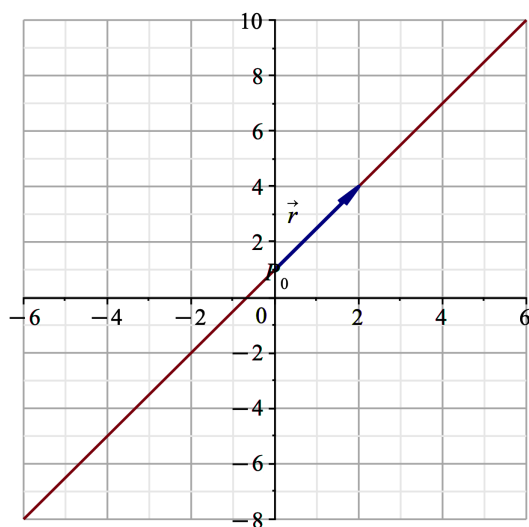
5.1 Parameterfremstilling for en ret linje

Når du skal regne opgaver med vektorer, skal du indlæse pakken *Gym*, som det sker i linjen nedenfor. Herefter vil alle funktionerne *arealP*, *arealT*, *cart*, ... være tilgængelige.

with(Gym) :

I Maple er det mest bekvemt at beskrive en parameterfremstilling for en ret linje som en funktion $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dvs. som en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt talpar – altså en vektor.

En parameterfremstilling er fastlagt ud fra et ankerpunkt P_0 og en retningsvektor $\vec{r}$.



En parameterfremstilling for linjen ovenfor er
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

I Maple defineres denne parameterfremstilling som en funktion ved:

$$l(t) := \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 2, 3 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 2, 3 \rangle \quad (5.1)$$

Beregn $l(t)$, og du får dette output:

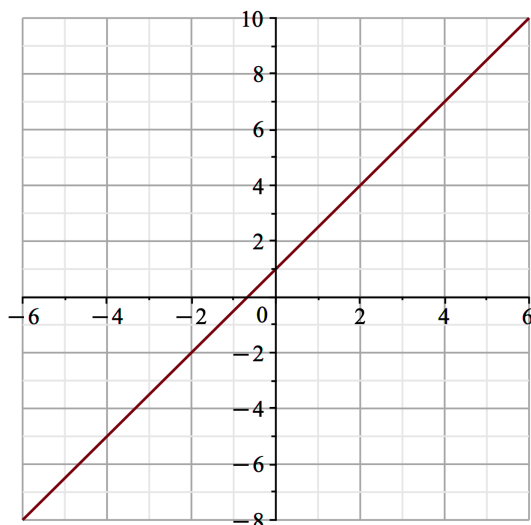
$$l(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 + 3t \end{bmatrix}$$

Parameterværdier beregner du således, fx:

$$l(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Linjen tegnes med kommandoen *vektorPlot* fra Gym-pakken:

`vektorPlot(l(t), t=-3..3, gridlines)`



Eksempel

Bestem en parameterfremstilling for den rette linje, der går gennem punkterne $P(-3, 4)$ og $Q(7, 13)$.

Først bestemmes en retningsvektor for linjen:

$$P := [-3, 4] :$$

$$Q := [7, 13] :$$

$$\overrightarrow{PQ} := \langle Q - P \rangle = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Hvis vi bruger P som et punkt på linjen, bliver en parameterfremstilling:

$$\langle x, y \rangle = \langle P \rangle + t \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10t \\ 4 + 9t \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Løsning med Gym-pakken:

`with(Gym) :`

`linje([-3, 4], [7, 13], t)`

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10t \\ 4 + 9t \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

eller ved at bruge navnene på punkterne:

`linje(P, Q, t)`

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 10t \\ 4 + 9t \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

5.2 Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger

$$l(t) := \langle 5, -2 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 5, -2 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle \quad (5.5)$$

$$m(t) := \langle 3, 1 \rangle + t \cdot \langle -2, 4 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 3, 1 \rangle + t \cdot \langle -2, 4 \rangle \quad (5.6)$$

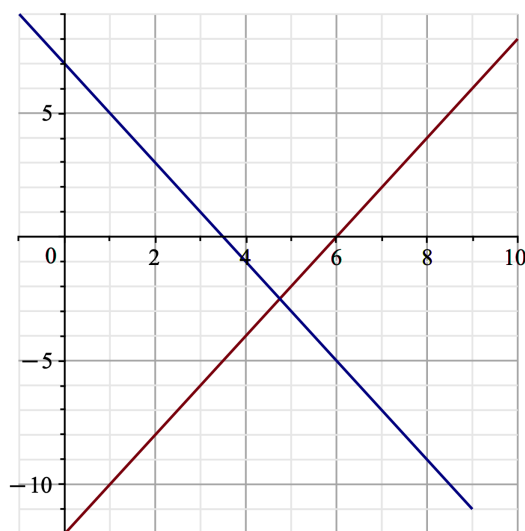
For god ordens skyld skal vi lige tjekke, om de to linjer skærer hinanden:

with(Gym) :

$$\text{determinant}(\langle 1, 2 \rangle, \langle -2, 4 \rangle) = 8$$

Da determinaten er forskellig fra 0, er de to retningsvektorer ikke parallelle, og de to linjer må derfor have et skæringspunkt.

vektorPlot([[l(t), color = "Burgundy"], [m(t), t = -3 .. 2, color = "Navy"]], gridlines)



Det smarte ved at 'hardcode' linjernes farver er, at du så ved, at l er den røde og m er den blå.

Når skæringspunktet skal beregnes, skal du passe lidt på. Opfattes de to linjer som banekurven for to partiklers bevægelse, vil en løsning til ligningen $l(t) = m(t)$ være et punkt, hvor de to partikler befinder sig til samme tidspunkt, og det behøver der jo ikke at være – selvom de to banekurver skærer hinanden.

I stedet skal du parametrisere med to forskellige tidsparetre s og t , og løse ligningen

$$l(t) = m(s)$$

$$\begin{bmatrix} 5 + t \\ -2 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2s \\ 1 + 4s \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Der er et system bestående af to ligninger med to ubekendte

$$\begin{cases} 5 + t = 3 - 2s \\ -2 + 2t = 1 + 4s \end{cases}$$

Dette system kan løses med

$$\text{solve}(\{5 + t = 3 - 2s, -2 + 2t = 1 + 4s\}, \{s, t\})$$

$$\left\{s = -\frac{7}{8}, t = -\frac{1}{4}\right\} \quad (5.8)$$

Maples solve-kommando kan også løse vektorligninger direkte:

$$\text{solve}(l(t) = m(s))$$

$$\left\{s = -\frac{7}{8}, t = -\frac{1}{4}\right\} \quad (5.9)$$

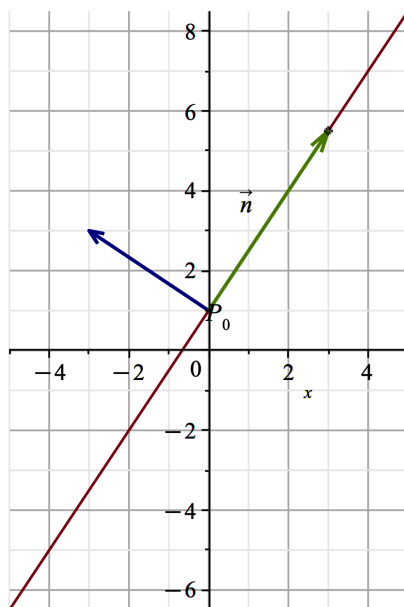
Skæringspunktet bestemmes da ved at indsætte $t = -\frac{1}{4}$ i $l(t)$ (eller $s = -\frac{7}{8}$ i $m(s)$):

$$l\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Skæringspunktet bliver dermed $\left(\frac{19}{4}, -\frac{5}{2}\right)$.

5.3 Linjens ligning

Ligningen for en ret linje er fastlagt ved et ankerpunkt P_0 og en normalvektor $\vec{n}$:



Hvis $P_0 = (x_0, y_0)$ og normalvektoren er $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, kan linjens ligning skrives på formen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

I et konkret eksempel kan du blot indsætte værdier i denne ligning.

Lad os se på et eksempel:

En linje går gennem punktet $P_0(0, 1)$ og har normalvektoren $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Linjens ligning bliver da:

$$-3 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1) = 0$$

$$-3x + 2y - 2 = 0 \quad (5.10)$$

Du kan nemt omskrive ligningen for l til den traditionelle form $y = a \cdot x + b$ således:

$$-3x + 2y - 2 = 0 \xrightarrow{\text{isolate for } y} y = \frac{3x}{2} + 1$$

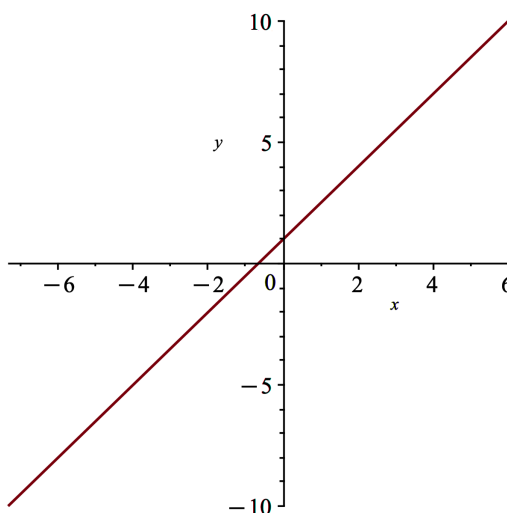
Du kan tegne grafen for en ret linje vha. *plot*, men kun hvis linjen er givet ved et funktionsudtryk på formen $f(x) = a \cdot x + b$, idet *plot* kun tegner funktionsgrafer og parametriske plots.

Hvis du vil tegne efter ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, kan du blot trække hele ligningen ind i et tomt koordinatsystem:



Indsæt et tomt koordinatsystem ved at gå til **Insert** fanen og klik på knappen

Træk ligningen $-3x + 2y - 2 = 0$ ind i det tomme koordinatsystem:



Hvis du højreklikker i plottet, så får du en masse muligheder for at justere plottet. De samme muligheder kommer frem i kontekstpanelet til højre:

- ☐ Scaling Constrained
- Reset view
- Style
- Symbol
- Line
- Color
- Transparency
- Axes
- Legend
- Title
- Manipulator
- Probe Info
- Export

Eksempel

Bestem en ligning for en ret linje, der går gennem punkterne $A = (-2, 1)$ og $B = (2, 3)$.

For at bestemme en ligning for en linje, skal vi have et punkt og en normalvektor. Vi definerer først de to punkter (som lister):

with(Gym) :

$$A := [-2, 1] = [-2, 1]$$

$$B := [2, 3] = [2, 3]$$

En retningsvektor for linjen bestemmes ud fra de to punkter:

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tværvektoren hertil er en normalvektor for linjen:

$$\vec{n} := \text{tværvektor}(\overrightarrow{AB})$$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Linjens ligning bliver hermed

$$\begin{aligned} -2(x - (-2)) + 4(y - 1) &= 0 \\ -2x - 8 + 4y &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

der ved division med -2 kan reduceres til $x - 2y + 4 = 0$

Med Gym-pakken

Med kommandoen *linje* fra Gym-pakken går det noget nemmere:

$$\text{linje}(A, B)$$

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad (5.13)$$

Her fås ligningen på en form (om muligt), hvor y er isoleret på venstre side.

5.4 Skæring mellem to linjer givet ved ligninger

Skal du finde skæringspunktet mellem to linjer (givet ved ligninger):

$$\begin{aligned} l &:= 3x + 5y - 7 = 0 \\ l &:= 3x + 5y - 7 = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} m &:= 2x - 3y + 6 = 0 \\ m &:= 2x - 3y + 6 = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

hvor linjerne er navngivet som l og m , hhv.

Først tjekker du, om de to normalvektorer er parallelle (ved at se, om linjernes normalvektorer er parallelle):

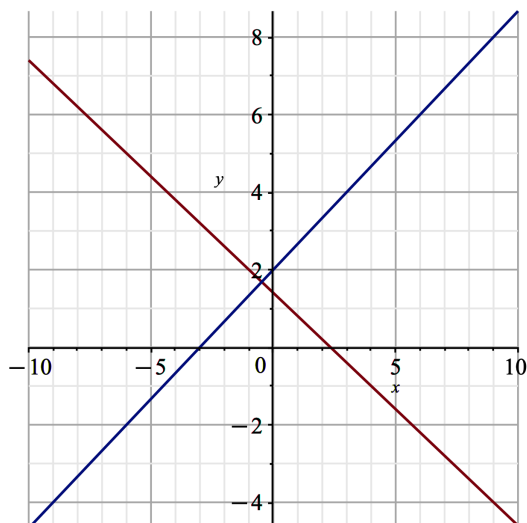
$$\det(\langle 3, 5 \rangle, \langle 2, -3 \rangle) = -19$$

Da determinanten er forskellig fra 0, er de to normalvektorer ikke parallelle, og linjerne har et skæringspunkt. Dette bestemmes således:

$\text{solve}(\{l, m\}, \{x, y\})$

$$\left\{ x = -\frac{9}{19}, y = \frac{32}{19} \right\} \quad (5.16)$$

Du kan hurtigt lave et plot af de to linjer ved at trække dem til et tomt koordinatsystem (pas på, at du ikke får $l :=$ og $m :=$ med når du trækker):



5.5 Afstand fra punkt til linje

Linjen givet ved en ligning

Formlen for afstanden fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en linjen med ligningen $l: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ er:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Denne formel kan benyttes direkte – fx således:

Find afstanden fra punktet $P = (4, 5)$ til linjen med ligningen $3x - 4y - 8 = 0$:

$$l := 3x - 4y - 8 = 0$$

$$l := 3x - 4y - 8 = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{dist} := \frac{|\text{subs}(\{x=4, y=5\}, \text{lhs}(l))|}{\text{længde}(\langle 3, 4 \rangle)}$$

$$\text{dist} := \frac{16}{5} \quad (5.18)$$

Med Gym-pakken (afstand):

Her kan afstanden findes med kommandoen *afstand* :

with(Gym) :

$$\text{afstand}([4, 5], 3x - 4y - 8 = 0) = \frac{16}{5}$$

Lidt pænere vil de se ud, hvis punktet og ligningen defineres først:

$$P := [4, 5] :$$

$$l := 3x - 4y - 8 = 0 :$$

$$\text{afstand}(P, l) = \frac{16}{5}$$

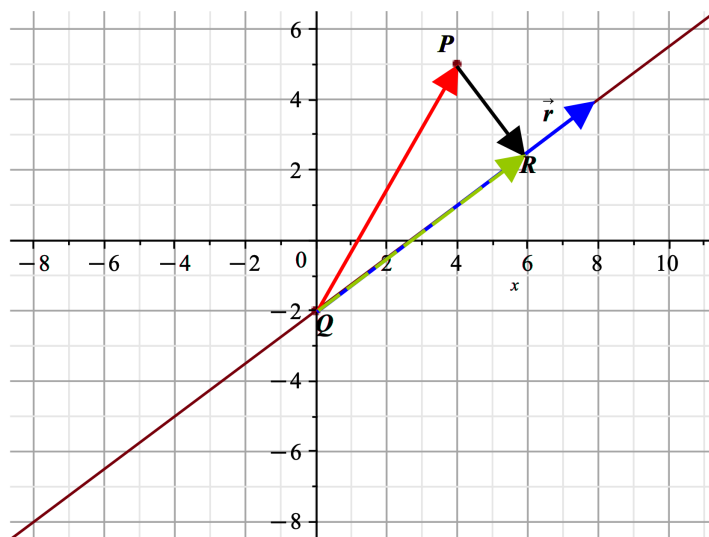
Linjen givet ved en parameterfremstilling

Hvis linjen i stedet er givet ved en parameterfremstillingen

$$\langle x, y \rangle = \langle 0, -2 \rangle + t \cdot \langle 8, 6 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8t \\ -2 + 6t \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

kan du naturligvis omskrive parameterfremstillingen til en ligning for linjen og bruge ovenstående metode, men du kan også benytte projektion til at finde afstanden med:



På figuren er

$$Q := [0, -2] :$$

et punkt på linjen

$$\vec{r} := \langle 8, 6 \rangle :$$

linjens retningsvektor

$$P := [4, 5] :$$

det givne punkt.

Desuden er projektionen af $\overrightarrow{QP}$ på $\vec{r}$ vist, hvor

$$\overrightarrow{QP} := \langle P - Q \rangle = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Afstanden fra punktet P til linjen er lig med længden af $\overrightarrow{PR}$.

Af figuren ses, at

$$\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR}$$

der ved omskrivning giver

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP}$$

og da $\overrightarrow{QR}$ er projektionen af $\overrightarrow{QP}$ på $\vec{r}$, fås:

$$\overrightarrow{PR} := \text{projektion}(\overrightarrow{QP}, \vec{r}) - \overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} \frac{48}{25} \\ -\frac{64}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{længde}(\overrightarrow{PR}) = \frac{16}{5}$$

Med Gym-pakken (afstand):

$$P := [4, 5] :$$

$$l(t) := \langle 0, -2 \rangle + t \cdot \langle 8, 6 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 0, -2 \rangle + t \cdot \langle 8, 6 \rangle \quad (5.20)$$

Afstanden fra P til l findes ved

$$\text{afstand}(P, l(t)) = \frac{16}{5}$$

Punkt og parameterfremstilling kan sættes direkte ind i kommandoen

$$\text{afstand}([4, 5], \langle x, y \rangle = \langle 0, -2 \rangle + t \cdot \langle 8, 6 \rangle) = \frac{16}{5}$$

eller kort

$$\text{afstand}([4, 5], \langle 0, -2 \rangle + t \cdot \langle 8, 6 \rangle) = \frac{16}{5}$$

5.6 Afstand mellem to parallelle linjer

Linjerne er givet ved ligninger

Vi kan benytte formelen for afstanden fra et punkt til en linje til at finde afstanden mellem de to parallelle linjer givet ved disse ligninger:

$$l := 2x - y + 1 = 0$$

$$l := 2x - y + 1 = 0 \quad (5.21)$$

$$m := 2x - y + 5 = 0$$

$$m := 2x - y + 5 = 0 \quad (5.22)$$

Ideen er at finde et punkt på en af linjerne og herefter bestemme afstanden fra dette punkt til den anden linje.

Sætter vi $x = 0$ i l , ser vi, at $y = 1$. Så vi har punktet på l :

$$P := [0, 1] = [0, 1]$$

Vi finder så afstanden til m ved hjælp af afstandsformlen:

$$dist = \frac{|subs(\{x=0, y=1\}, lhs(m))|}{længde(\langle 2, -1 \rangle)}$$

$$dist = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (5.23)$$

Med Gym-pakken (afstand)

with(Gym) :

$$afstand(2x - y + 1 = 0, 2x - y + 5 = 0) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Linjerne er givet ved parameterfremstillinger

with(Gym) :

$$l(t) := \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle \quad (5.24)$$

$$m(t) := \langle 0, 5 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 0, 5 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle \quad (5.25)$$

Som punkt vælger vi $(0, 1)$ på linjen l , og definerer

$$P := [0, 1] = [0, 1]$$

og vi skal finde afstanden fra P til linjen m . Hertil skal vi bruge et punkt Q på m og en retningsvektor $\vec{r}$ for m :

$$Q := [0, 5] = [0, 5]$$

$$\vec{r} := \langle 1, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu bruge nøjagtig den samme fremgangsmåde, som vi benyttede i ovenstående afsnit 'Afstand fra punkt til linje (parameterfremstilling)'. Hertil finder vi først

$$\overrightarrow{QP} := \langle P - Q \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

og udregner

$$\text{projektion}(\overrightarrow{QP}, \vec{r}) - \overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Længden af denne vektor er så afstanden mellem l og m :

$$\text{dist} = \text{længde} \left(\left\langle -\frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle \right)$$

$$\text{dist} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad (5.26)$$

Med Gym-pakken (afstand):

$$\text{afstand}(l(t), m(t)) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

5.7 Cirkelns ligning

Det er en simpel sag at opskrive ligningen for en cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r på formen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (5.27)$$

Men hvordan kommer vi den anden vej? Altså, hvis vi ikke har en cirkel givet ved ovenstående udtryk (sørg altid for at have 0 på højresiden). Fx:

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 54 = 0 \quad (5.28)$$

hvordan finder vi så centrum og radius?

Klik på cirkelligningen, og vælg **Complete Square > x** fra kontekstmenuen og dernæst **Complete Square > y**:

$$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 54 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (y - 7)^2 + x^2 + 6x + 5 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (x + 3)^2 + (y - 7)^2 - 4 = 0$$

Heraf følger, at $(-3, 7)$ og radius $r = \sqrt{4} = 2$.

OBS: Sørg altid for, at du har 0 på højresiden inden du bruger **Complete Square**. Og vær opmærksom på, at rækkefølgen af kvadraterne **ikke** altid følger standarden.

Med Gym-pakken

Her udføres det hele med én kommando og leddene står som i standardformen:

with(Gym) :

omskrivCirkel ($x^2 + y^2 + 6x - 14y + 54 = 0$)

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 4 \quad (5.29)$$

5.8 Tegning af en cirkel

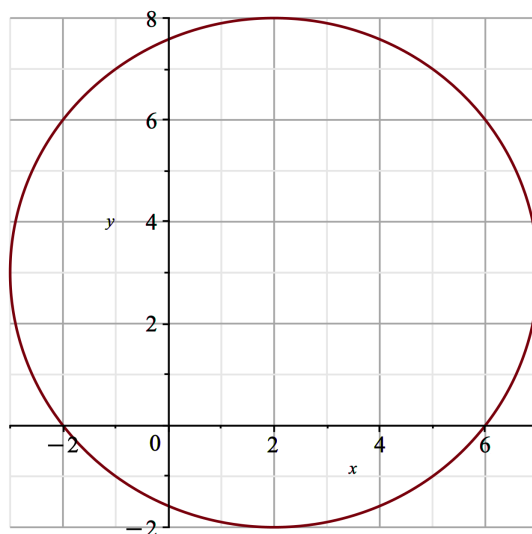
Du kan let tegne en cirkel ved at *trække* cirkelns ligning (den blå ligning) til et tomt koordinatsystem, du indsætter med knappen



, som du finder i **Insert** fanebladet.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad (5.30)$$

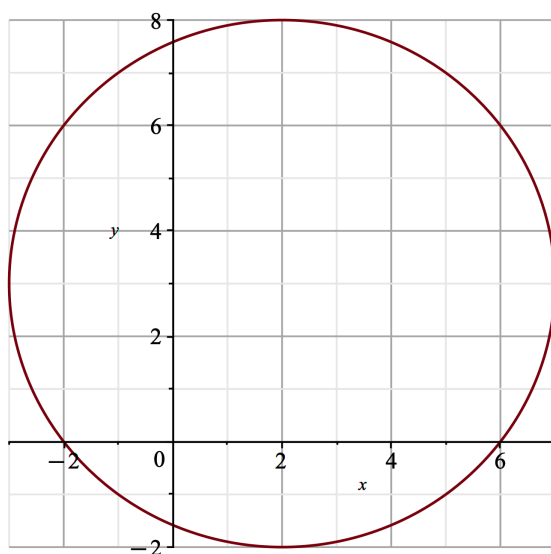


Hvis du trækker flere cirkelligninger eller ligningen for en linje til det samme koordinatsystem, vil du se, at tegningen reskaleres, så cirklerne bliver ægformede. Dette kan du reparere ved at klikke i koordinatsystemet og vælge **Scaling constrained** fra kontekstmenuen.

Det er ligegyldigt om den cirkelligning, du trækker til det tomme plot, er på standardform eller ej. Du vil få tegnet cirklen:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \quad (5.31)$$



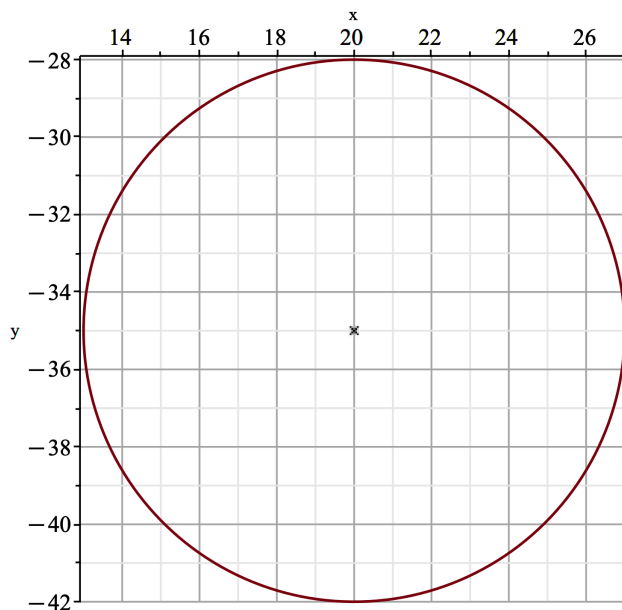
Det eneste problem er, at hvis cirklen falder uden for vinduet $[-10..10, -10..10]$, så plottes intet.

Med Gym-pakken:

Med kommandoen *plotCirkel* kan du plotte enhver cirkel – også selvom den falder uden for standardvinduet:

with(Gym) :

plotCirkel($x^2 + y^2 - 40x + 70y + 1576 = 0$)



Her kan vi aflæse, at cirklen har centrum i $(20, 35)$ og radius er 7.

Hvis dit plot skal indeholde mere end en enkelt cirkel, så er du nødt til at benytte et *implicit plot* – læs mere om dette nedenfor.

implicitplot

Hvis du vil 'hardcode' dit plot, så skal du bruge *implicitplot* fra *plots*-pakken. Se detaljer om denne i online hjælpen (skriv fx *?implicitplot* for at kalde specifik hjælp frem).

Kommandoen *implicitplot* plotter ligninger – i modsætning til *plot*, der plotter funktionsudtryk. Du kan plotte flere ligninger i samme kommando ved at pakke ligningerne sammen med `[ ]`.

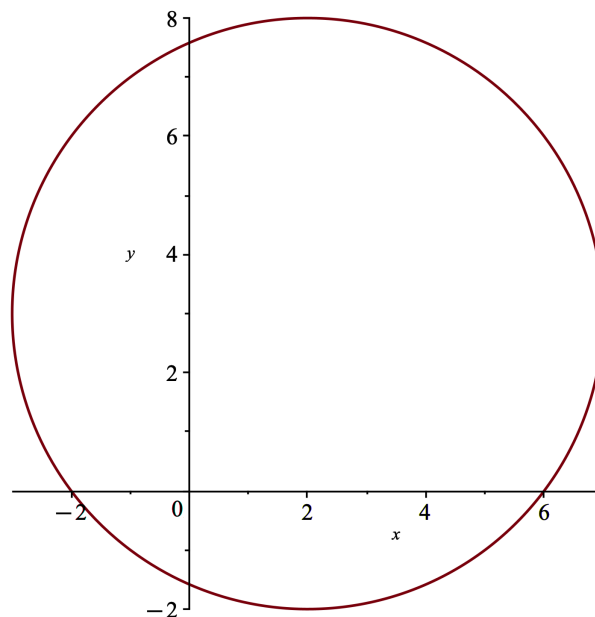
Vi vil tegne cirklen

$$CL1 := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$CL1 := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad (5.32)$$

with(plots) :

implicitplot(*CL1*, *x* = -10 ..10, *y* = -10 ..10, *scaling* = *constrained*)

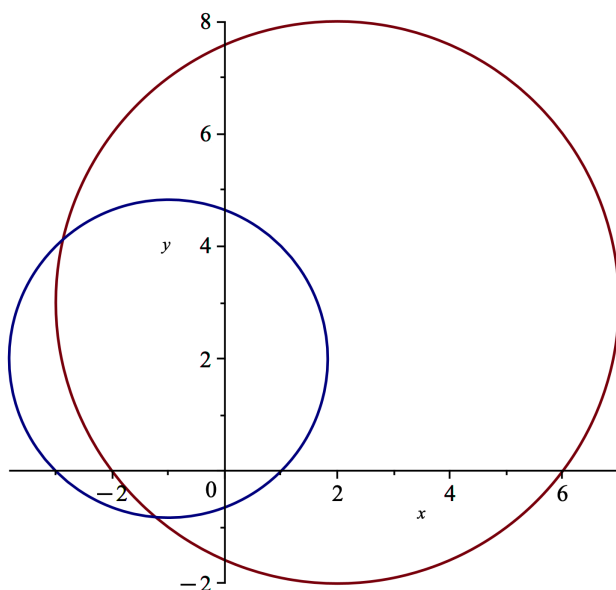


Lad os prøve i samme system at plotte (det er ligegyldigt, hvilken form cirkelns ligning har):

$$CL2 := x^2 + 2x + 5 + y^2 - 4y = 8$$

$$CL2 := x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 8 \quad (5.33)$$

implicitplot(`[CL1, CL2]`, *x* = -10 ..10, *y* = -10 ..10, *scaling* = *constrained*, *color* = ["Burgundy", "Navy"])



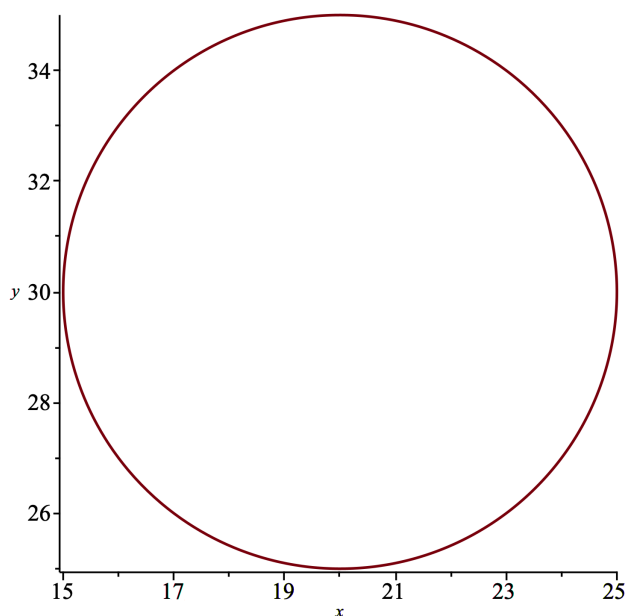
For at kunne lave pæne plots er det en fordel kende centrum og radius. Hvis du plotter denne cirkel

$$CL3 := x^2 + y^2 - 40x - 60y + 1275 = 0$$

$$CL3 := x^2 + y^2 - 40x - 60y + 1275 = 0 \quad (5.34)$$

i samme vindue som vi har brugt i de to eksempler ovenfor, vil du intet se. I sådanne tilfælde kan det være smart at udvide vinduet betragteligt, fx

`implicitplot(CL3, x=-100..100, y=-100..100, scaling=constrained)`



– og det kom der jo et fornuftigt plot ud af. Herefter kan du så, hvis du skal have flere ting med i plottet, begrænse vinduet på en sådan måde, at vinduet `[15..25, 25..35]` er en del af det valgte vindue.

5.9 Skæring mellem linje og cirkel

Dette er meget simpelt, hvis linjen er givet ved en ligning:

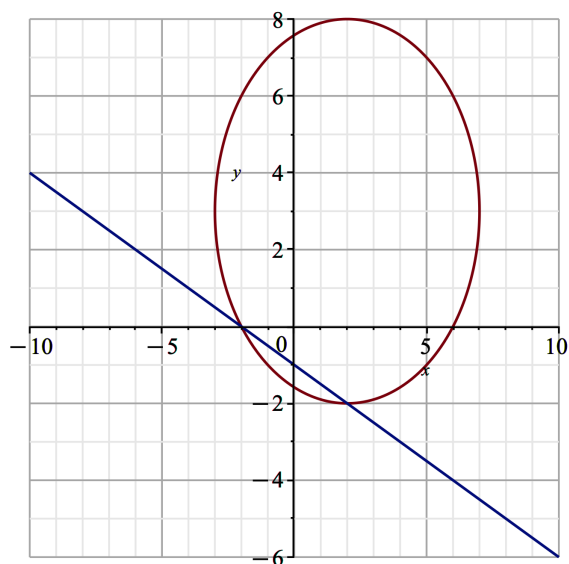
$$CL := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

$$CL := (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad (5.35)$$

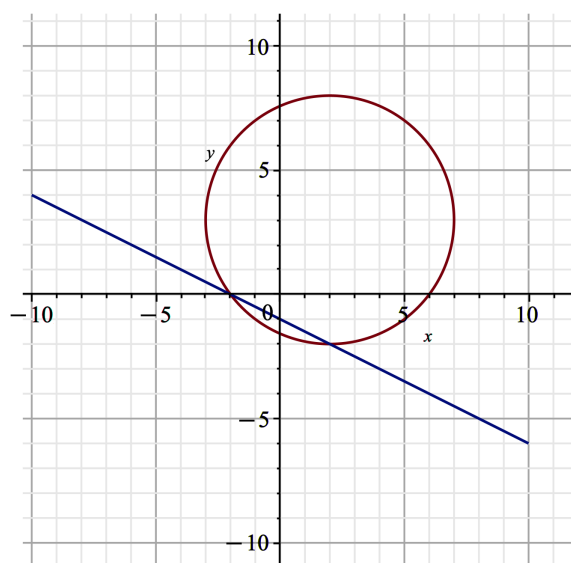
$$L := x + 2y + 2 = 0$$

$$L := x + 2y + 2 = 0 \quad (5.36)$$

Indsæt et tomt koordinatsystem med  og træk de to ligninger til koordinatsystemet:



og vælg **Scaling Constrained** i kontekstmenuen:

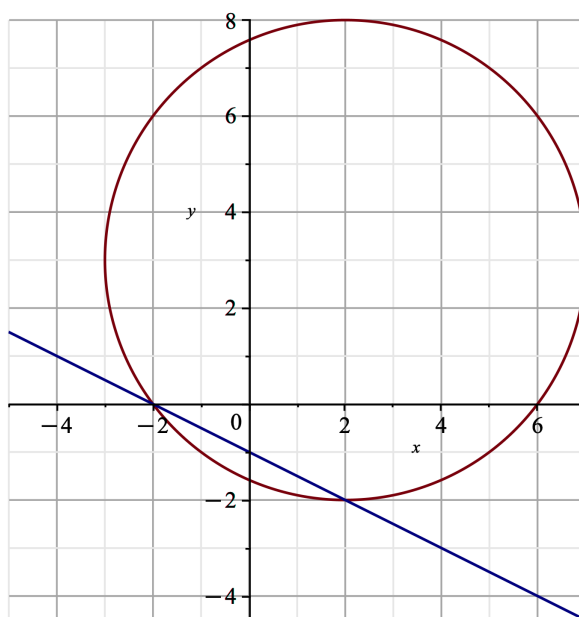


Tegning med implicitplot

Kommandoen hard-codes således:

with(plots) :

```
implicitplot([CL, L], x=-5..7, y=-5..10, scaling=constrained, numpoints=2000, color
= ["Burgundy", "Navy"], gridlines)
```



For at finde skæringspunkterne løses:

solve($\{CL, L\}, \{x, y\}$)

$$\{x = -2, y = 0\}, \{x = 2, y = -2\} \quad (5.37)$$

På tegningen ses, at det passer meget godt.

Hvis den samme linje er givet ved en parameterfremstilling er det en smule mere kompliceret at finde skæringspunkterne:

$$l(t) := \langle 6, -4 \rangle + t \cdot \langle 4, -2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 6, -4 \rangle + t \cdot \langle 4, -2 \rangle \quad (5.38)$$

Først indsættes linjens parameterfremstilling i cirkelns ligning - dvs: $x = 6 + 4t$ og $y = -4 - 2t$ indsættes i cirkelns ligning, og der løses med hensyn til t :

subs($\{x = 6 + 4t, y = -4 - 2t\}, CL$)

$$(4 + 4t)^2 + (-7 - 2t)^2 = 25 \quad (5.39)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -1\}, \{t = -2\}$$

Skæringspunkterne finder du ved at indsætte hhv. $t = -2$ og $t = -1$ i parameterfremstillingen.

$$l(-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$l(-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skæringspunkterne er altså $(2, -2)$ og $(-2, 0)$.

Alternativt: For at bevare forbindelsen til parameterfremstillingen l , kan indsætte linjens parameterfremstilling i cirkelns ligning således

$$\text{subs}(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2\}, CL)$$

$$(4 + 4t)^2 + (-7 - 2t)^2 = 25 \quad (5.40)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -1\}, \{t = -2\} \quad (5.41)$$

Fordelen ved denne metode er, at hvis du laver ændringer i din parameterfremstilling, så behøver du blot at genberegne solve-kommandoerne, idet ændringer automatisk videreføres med referencerne $l(t)_1$ og $l(t)_2$.

6 Vektorer i 3D

6.1 Vektorregning i 3D

Arbejdet med vektorer i 3D i Maple foregår stort set som i 2D – blot har vektorerne her en komponent mere. Indtastningen foregår således:

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

hvor de kantede parenteser laves vha < og > direkte fra tastaturet, og indeks på vektorens koordinater laves med Ctrl+(Shift)+_ (mac: cmd+alt+B)

Nogle af rutinerne fra Gym-pakken virker også i 3D: *dotP*, *len*, *proj*, *enhedsvektor*, *arealP*, *arealT* og *vinkel*. Fx findes længden af $\vec{a}$ således

with(Gym) :

$$\text{længde}(\vec{a}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

og skalarproduktet mellem to vektorer:

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$$

$$\text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Eksempel 1

En trekant har vinkelspidserne $A(1, 5, 7)$, $B(-3, 2, 3)$ og $C(4, 10, -2)$. Tegn trekanten, og bestem sidelængder og vinkler i trekanten.

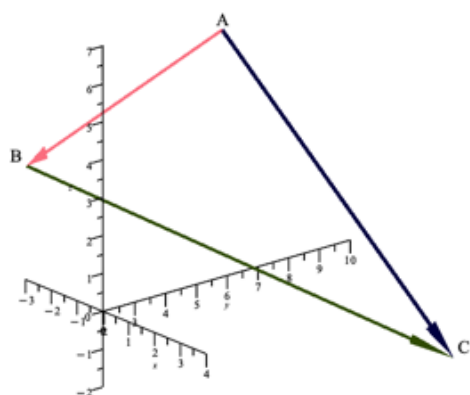
Som tidligere beskriver vi punkterne med lister:

$$A := [1, 5, 7] : B := [-3, 2, 3] : C := [4, 10, -2] :$$

$$\vec{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BC} := \langle C - B \rangle = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AC} := \langle C - A \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$



with(Gym) :

$$\text{længde}(\overrightarrow{AB}) = \sqrt{41}$$

$$\text{længde}(\overrightarrow{AC}) = \sqrt{115}$$

$$\text{længde}(\overrightarrow{BC}) = \sqrt{138}$$

$\angle A$:

$$\text{vinkel}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 82.46860070$$

$\angle B$:

$$\text{vinkel}(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 64.82271163$$

$\angle C$

$$\text{vinkel}(-\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BC}) = 32.70868776$$

Læg mærke til, at når en vinkel bestemmes, da 'udgår' vektorerne fra den pågældende vinkel. Det er en meget god metode til at sikre, at det er de indre vinkler, vi får beregnet. I en opgave som denne er det vigtigt, at man tjekker, at vinkelsummen faktisk er 180.

6.2 Krydsproduktet

Krydsproduktet er implementeret i Maple vha. $\times$ fra Common Symbols paletten

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Lad os lige checke, at dette $\times$ -produkt opfylder, at $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

with(Gym) :

$$\text{dotP}(\vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b})) = a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (-a_1 b_3 + a_3 b_1) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \stackrel{\text{simplicity}}{=} 0$$

$$\text{dotP}(\vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b})) = b_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 (-a_1 b_3 + a_3 b_1) + b_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \stackrel{\text{simplicity}}{=} 0$$

6.3 Teoretiske overvejelser vedr. krydsproduktet

Hvis krydsproduktet mellem to vektorer defineres som ovenfor, virker det let som en åbenbaring, så lad os se, hvordan vi let kan regne os frem til noget der ligner krydsproduktet.

Hvis vi har givet to (egentlige og ikke-parallele) vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$:

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle :$$

og ønsker at finde en vektor

$$\vec{x} := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle :$$

der er ortogonal til såvel $\vec{a}$ som $\vec{b}$, så må skalarprodukterne være 0. Dvs

$$\text{dotP}(\vec{a}, \vec{x}) = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad (6.1)$$

$$\text{dotP}(\vec{b}, \vec{x}) = 0$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \quad (6.2)$$

Vi får herved et ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Til dette system er der uendeligt mange løsninger, men hvis vi holder fx x_3 fast på en valgt (vilkaarlig) værdi, så får vi et ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte. Vi sætter derfor $x_3 = t$ ind i ligningssystemet:

$$\text{subs}(x_3 = t, (1.3.1))$$

$$t a_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad (6.3)$$

$$\text{subs}(x_3 = t, (1.3.2))$$

$$t b_3 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0 \quad (6.4)$$

og løser med hensyn til x_1 og x_2 :

$\text{solve}(\{(\mathbf{1.3.3}), (\mathbf{1.3.4})\}, \{x_1, x_2\})$

$$\left\{ x_1 = \frac{t(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, x_2 = -\frac{t(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right\} \quad (6.5)$$

Da der er frit valg med hensyn til t , kan vi jo lige så godt vælge et t , der giver pæne koordinater

$\text{subs}(t = a_1 b_2 - a_2 b_1, (\mathbf{1.3.5}))$

$$\{x_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, x_2 = -a_1 b_3 + a_3 b_1\} \quad (6.6)$$

6.4 Beviser med Maple

I Maple er det ganske simpelt at lave nogle af de beregningstunge koordinatudregninger i forbindelse med regneregler for krydsprodukt:

$$1. \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$2. \quad t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = t \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times t \cdot \vec{b}$$

$$3. \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$4. \quad \vec{a} \times \vec{o} = \vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}$$

$$5. \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$\vec{a} := \langle a_1, a_2, a_3 \rangle : \vec{b} := \langle b_1, b_2, b_3 \rangle : \vec{c} := \langle c_1, c_2, c_3 \rangle :$$

Bevis for 1:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{bmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ -a_1(b_3 + c_3) + a_3(b_1 + c_1) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 b_3 + a_2 c_3 - a_3 b_2 - a_3 c_2 \\ -a_1 b_3 - a_1 c_3 + a_3 b_1 + a_3 c_1 \\ a_1 b_2 + a_1 c_2 - a_2 b_1 - a_2 c_1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$(1.4.1) - (1.4.2) \stackrel{\text{simply}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bevis for 5.

$$\text{længde}(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (-a_1 b_3 + a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad (6.9)$$

$$\text{len}(\vec{a})^2 \cdot \text{len}(\vec{b})^2 - \text{dotP}(\vec{a}, \vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \quad (6.10)$$

$$(1.4.3) - (1.4.4) \stackrel{\text{simply}}{=} 0$$

7 Analytisk geometri i 3D

7.1 Parameterfremstilling for en ret linje i rummet

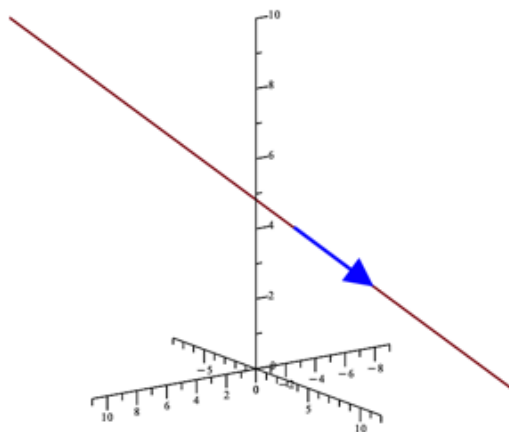
Beskrivelse, eksempel og plot

I Maple er det mest bekvemt at beskrive en parameterfremstilling for en ret linje som en funktion $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dvs., som en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt triple - altså en 3D-vektor.

En parameterfremstilling er fastlagt ud fra et ankerpunkt P_0 og en retningsvektor $\vec{r}$. Fx
 $l(t) := \langle 1, 2, 5 \rangle + t \cdot \langle -2, 2, -1 \rangle$

$$l := t \mapsto \langle 1, 2, 5 \rangle + t \cdot \langle -2, 2, -1 \rangle \quad (7.1)$$

hvor $\vec{r} = \langle -2, 2, -1 \rangle$ og $P_0 = [1, 2, 5]$.



Parameterværdier beregner du således, fx:

$$l(2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

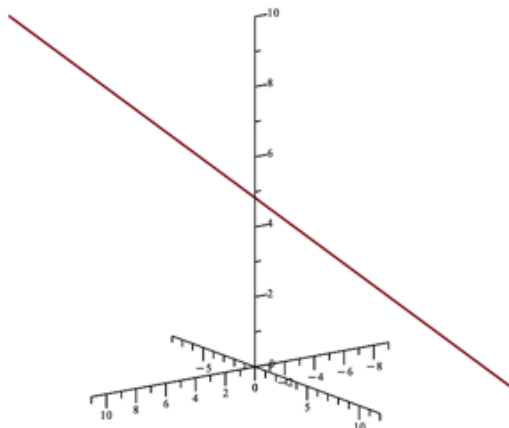
Parameterfremstillinger tegnes med *spacecurve*-kommandoen (der ligger i *plots*-pakken). Syntaksen er

spacecurve ($[x(t), y(t), z(t)]$, $t = \min \dots \max$, *options*)

Desværre er det ikke muligt at fodre *spacecurve* direkte med parameterfremstillingen:

with(plots) :

```
spacecurve([l(t)1, l(t)2, l(t)3], t = -5 .. 5, axes = normal, color = "Burgundy", thickness = 3,
size = [400, 400])
```



Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger

$$l(t) := \langle 6, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 3, 2, 3 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 6, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 3, 2, 3 \rangle \quad (7.2)$$

$$m(t) := \langle 4, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 4, 2, 1 \rangle + t \cdot \langle 1, 2, 3 \rangle \quad (7.3)$$

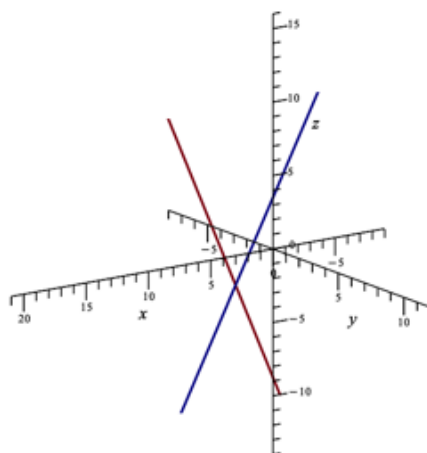
For god ordens skyld skal vi lige checke, om de to linjer er parallelle eller sammenfaldende. Det ses umiddelbart, at de to retningsvektorer $\langle 3, 2, 3 \rangle$ og $\langle 1, 2, 3 \rangle$ ikke er proportionale, og derfor ikke parallelle.

with (plots) :

```
l1 := spacecurve([l(t)1, l(t)2, l(t)3], t = -5 .. 5, color = "Burgundy", thickness = 3) :
```

```
l2 := spacecurve([m(t)1, m(t)2, m(t)3], t = -5 .. 5, color = "Navy", thickness = 3) :
```

```
display([l1, l2], axes = normal, orientation = [55, 75, 0], labels = [x, y, z], labelfont = [times,
20], size = [500, 500])
```



(7.4)

Når skæringspunktet skal beregnes, skal du passe lidt på. Opfattes de to linjer som banekurven for to partiklers bevægelse, vil en løsning til ligningen $l(t) = m(t)$ være et punkt, hvor de to partikler befinder sig til samme tidspunkt, og det behøver der jo ikke at være selvom de to banekurver skærer hinanden (men det sker her – se nedenfor)

I stedet skal du parametrisere med to forskellige tidsparetre s og t , og løse

$$\text{solve}(l(t) = m(s))$$

$$\{s = -1, t = -1\} \quad (7.5)$$

Skæringspunktet bestemmes da ved at indsætte $t = -1$ i $l(t)$ (eller $s = -1$ i $m(s)$):

$$l(-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Afstand fra punkt til linje

Afstanden fra et punkt P til linjen l er bestemt ved formlen

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}|}{|\vec{r}|}$$

hvor P_0 er et punkt på linjen l og $\vec{r}$ er en retningsvektor for linjen l .

Vi vil her bruge formlen til at finde afstanden fra

$$P := [3, 5, 4] = [3, 5, 4]$$

til linjen l med parameterfremstillingen

$$l := \langle x, y, z \rangle = \langle 4, -3, 5 \rangle + t \cdot \langle 2, -3, -1 \rangle$$

$$l := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2t \\ -3 - 3t \\ 5 - t \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Som P_0 kan vi bruge punktet

$$P_0 := [4, -3, 5] = [4, -3, 5]$$

og en retningsvektor kan vi direkte aflæse til

$$\vec{r} := \langle 2, -3, -1 \rangle$$

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Vi sætter ind i formlen:

with(Gym) :

$$dist = \frac{\text{længde}(\vec{r} \times \langle P - P_0 \rangle)}{\text{længde}(\vec{r})}$$

$$dist = \frac{\sqrt{299} \sqrt{14}}{14} \quad (7.8)$$

Med Gym-pakken (afstand)

$$afstand(P, l)$$

$$\frac{\sqrt{299} \sqrt{14}}{14} \quad (7.9)$$

Afstand mellem to parallelle linjer

Til at bestemme afstanden mellem to parallelle linjer givet ved parameterfremstillinger kan vi benytte metoden til at bestemme afstanden fra et punkt til en linje. Vi kan blot vælge et punkt på den ene linje og bruge denne til at finde afstanden til den anden linje.

Lad os se på et konkret eksempel:

with(Gym) :

$$l := \langle x, y, z \rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle + t \cdot \langle 3, 4, -1 \rangle :$$

$$m := \langle x, y, z \rangle = \langle -3, 4, 2 \rangle + t \cdot \langle 6, 8, -2 \rangle :$$

Det er let at se, at linjerne er parallelle, idet koordinatsættene til de to retningsvektorer er proportionale: $\langle 6, 8, -2 \rangle = 2 \cdot \langle 3, 4, -1 \rangle$.

Vi vælger et punkt P på l (ankerpunktet):

$$P := [1, 2, 0] = [1, 2, 0]$$

Som P_0 kan vi bruge punktet

$$P_0 := [-3, 4, 2] = [-3, 4, 2]$$

og en retningsvektor for m kan vi direkte aflæse til

$$\vec{r} := \langle 6, 8, -2 \rangle = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi sætter ind i formlen:

$$dist = \frac{\text{længde}(\vec{r} \times \langle P - P_0 \rangle)}{\text{længde}(\vec{r})}$$

$$dist = \frac{7 \sqrt{3} \sqrt{26}}{13} \quad (7.10)$$

Med Gym-pakken (afstand)

$$afstand(l, m) = \frac{7 \sqrt{78}}{13}$$

hvilket er det samme resultat som ovenfor. I kommandoen *afstand* sker en simplifikation (med *simplify*), som ikke sker i den direkte udregning:

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{26}}{13} \stackrel{\text{simplify}}{=} \frac{7\sqrt{78}}{13}$$

Afstand mellem to vindskæve linjer

Vindskæve linjer er linjer, der hverken skærer hinanden eller er parallelle.

Formlen til bestemmelse af afstanden mellem to vindskæve linjer l_1 og l_2 er denne:

Lad $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ betegne de retningsvektorerne for l_1 og l_2 hhv. Sæt $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Lad P og Q betegne vilkårlige punkter på l_1 og l_2 hhv.

Afstanden mellem de to linjer er da bestemt ved

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$$

Lad os se på et konkret eksempel

$$l_1 := \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 0, 3 \rangle + t \cdot \langle 5, 3, -2 \rangle :$$

$$l_2 := \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 0, 3 \rangle + t \cdot \langle 5, 3, -2 \rangle :$$

Vi vælger de to ankerpunkter som P og Q :

$$P := [0, 0, 3] = [0, 0, 3]$$

$$Q := [2, 0, 0] = [2, 0, 0]$$

og de to retningsvektorer kan direkte aflæses:

$$\vec{r}_1 := \langle 5, 3, -2 \rangle = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_2 := \langle -3, 3, 0 \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi udregner:

$$\overrightarrow{PQ} := \langle Q - P \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{bmatrix}$$

og indsætter i formlen:

$$dist = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PQ}|}{\text{længde}(\vec{n})}$$

$$dist = \frac{5\sqrt{2}}{3} \quad (7.11)$$

Med Gym-pakken (afstand)

$$afstand(l_1, l_2) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

– eller ved at indsætte parameterfremstillingerne direkte:

$$afstand(\langle x, y, z \rangle = \langle 0, 0, 3 \rangle + t \cdot \langle 5, 3, -2 \rangle, \langle x, y, z \rangle = \langle 2, 0, 0 \rangle + t \cdot \langle -3, 3, 0 \rangle) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Plot af de to vindskæve linjer

Vi omformer de to parameterfremstillinger, så de bliver udtrykt som funktioner. Husk, at l_1 og l_2 skal skrives med 'literal index' – altså hvor indekset laves med dobbelt-understreg eller ved brug af ikonen  i Expression-paletten.

$$l_1(t) := \langle 0, 0, 3 \rangle + t \cdot \langle 5, 3, -2 \rangle :$$

$$l_2(t) := \langle 2, 0, 0 \rangle + t \cdot \langle -3, 3, 0 \rangle :$$

I *spacecurve* -kommandoen til plottet, hvor hver komponent i vektorfunktionen skal adresseres med et indeks, skal der bruges vektor-indeks.

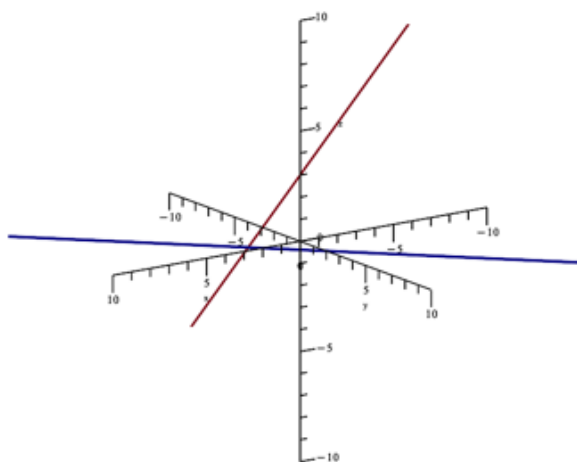
Husk: på en pc laves vektor-indeks med Ctrl+(Shift)+_ (du skal have 3 taster i sving for at lave indekset: Hold Ctrl og Shift nede samtidigt og tryk på _ tasten). På en mac taster du i stedet cmd+alt+B.

Driller det, så kan du i stedet for $l_1(t)_1$ skrive $l_1(t)[1]$ og tilsvarende for de øvrige.

with(plots) :

$$spacecurve([l_1(t)_1, l_1(t)_2, l_1(t)_3], [l_2(t)_1, l_2(t)_2, l_2(t)_3], t = -10 .. 10, view = [-10 .. 10, -10$$

(7.12)



Linjerne ser ud til at skære hinanden, men roterer du plottet en smule, så er det tydeligt, at det ikke er tilfældet. Klik i plottet og klik derefter på rotationsikonen (den hvisde på billedet nedenfor):



Så vil cursoren ændre udseende og du kan rotere plottet ved at trække en smule med musen.

7.2 Planens ligning

Beskrivelse, eksempel og plot

Ligningen for en ret plan er fastlagt ved et ankerpunkt P_0 og en normalvektor $\vec{n}$.

Planens ligning skrives på formen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

Lad os se på et eksempel:

En plan går gennem punktet $P_0 = (2, 4, -1)$ og har normalvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$. Planens ligning bestemmes:

$$\alpha := 3 \cdot (x - 2) + (-7) \cdot (y - 4) + (-1) \cdot (z - (-1)) = 0$$

$$\alpha := 3x + 21 - 7y - z = 0 \quad (7.13)$$

Det gik jo ganske nemt.

Med Gym-pakken (plan)

Med kommandoen *plan* kan du få Maple til at lave indsættelsen:

$$\text{plan}([2, 4, -1], \langle 3, -7, -1 \rangle)$$

$$3x - 7y - z + 21 = 0 \quad (7.14)$$

Eller ved at definere punktet og normalvektoren først:

$$P_0 := [2, 4, -1] = [2, 4, -1]$$

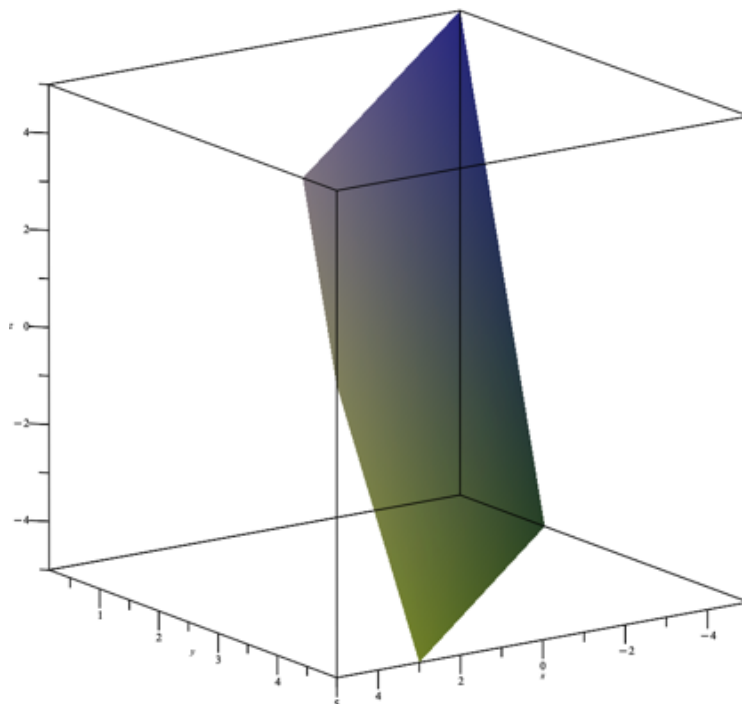
$$\vec{n} := \langle 3, -7, -1 \rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{plan}(P_0, \vec{n})$$

$$3x - 7y - z + 21 = 0 \quad (7.15)$$

Plot af planen

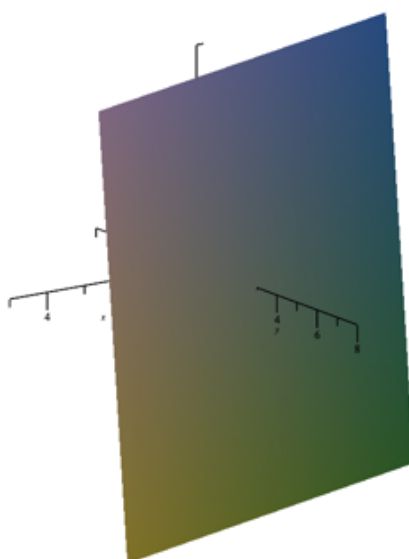
Hvis du vil tegne en plan med ligningen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, kan du trække planens ligning til et 3D-koordinatsystem, du har indsat med **Insert > Plot > 3D**. Det kommer til at se sådan ud når der er foretaget ændringen **Style > Surface** i kontekstmenuen



Du kan også benytte kommandoen *implicitplot3d* fra *plots*-pakken. Der er en masse indstillinger til denne kommando – herunder, hvordan planen skal se ud, hvordan lyset skal falde og hvor gennemsigtig den skal være. Se detaljer her (skriv: *plot3d,option* i feltet i menulinjen, så kommer hjælpesiden frem):

with(plots) :

```
implicitplot3d( $\alpha$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 8$ ,  $z = -5 \dots 5$ , axes = normal, style = surface, size = [500, 500])
```



En plans skæring med koordinataksene

En plan er givet ved ligningen

$$\alpha := x - 6y + 2z + 4 = 0$$

$$\alpha := x - 6y + 2z + 4 = 0 \quad (7.16)$$

Planens normalvektor er $\vec{n} = \langle 1, -6, 2 \rangle$. Da denne ikke er parallel med en af koordinataksene, vil planen skære alle akser. Skæringspunkterne bestemmes ved at sætte to af variablene lig med 0, og bestemme den sidste:

$$\text{subs}(\{x=0, y=0\}, \alpha)$$

$$4 + 2z = 0 \quad (7.17)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{z = -2\} \quad (7.18)$$

Dvs., at α skærer z -aksen i punktet $[0, 0, -2]$.

Tilsvarende findes skæring med x - og y -aksen:

$$\text{subs}(\{y=0, z=0\}, \alpha)$$

$$x + 4 = 0 \quad (7.19)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{x = -4\} \quad (7.20)$$

Dvs., at α skærer x -aksen i punktet $[4, 0, 0]$.

$$\text{subs}(\{x=0, z=0\}, \alpha)$$

$$4 - 6y = 0 \quad (7.21)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\left\{y = \frac{2}{3}\right\} \quad (7.22)$$

Dvs., at α skærer y -aksen i punktet $\left[0, \frac{2}{3}, 0\right]$

Planens ligning ud fra 3 punkter i planen

Planen α indeholder punkterne

$$A := [1, 1, 6] : B := [1, 3, 6] : C := [-2, 6, 0] :$$

Vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ må da være vektorer i planen. Disse kan findes således:

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle; \overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{AC} &:= \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Da disse er ikke-parallelle, vil deres krydsprodukt være en normalvektor for planen α :

$$\vec{n} := \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Benyttes fx A som planens ankerpunkt, fås ligningen

$$\begin{aligned} \alpha &:= -12 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 1) + 6 \cdot (z - 6) = 0 \\ \alpha &:= -12x - 24 + 6z = 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Med Gym-pakken

$$\text{plan}(A, B, C)$$

$$2x - z + 4 = 0 \quad (7.25)$$

Resultatet her er det samme som ovenfor. Der er blot divideret med -6 på begge sider af ligningen.

Kommandoen *plan* vil også fungere med de aktuelle koordinater for de tre punkter:

$$\text{plan}([1, 1, 6], [1, 3, 6], [-2, 6, 0])$$

$$2x - z + 4 = 0 \quad (7.26)$$

Planens ligning ud fra ét punkt og to ikke-parallelle vektorer

Planen α indeholder punkterne

$$A := [1, 1, 6] = [1, 1, 6]$$

og er udspændt af vektorerne

$$\vec{v}_1 := \langle 0, 2, 0 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 := \langle -3, 5, -6 \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

En normalvektor for planen er de

$$\vec{n} := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{n} := \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Planens ligning er da

$$\begin{aligned} -12(x-1) + 0 \cdot (y-1) + 6(z-6) &= 0 \\ -12x - 24 + 6z &= 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

Med Gym-pakken (plan)

$$\begin{aligned} \text{plan}(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \\ 2x - z + 4 = 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Der er den samme ligning som ovenfor: ligningen er blot blevet divideret med -6 på begge sider.

Du kan selvfølgelig også indsætte alle koordinaterne direkte:

$$\begin{aligned} \text{plan}([1, 1, 6], \langle 0, 2, 0 \rangle, \langle -3, 5, -6 \rangle) \\ 2x - z + 4 = 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Skæring mellem to planer (givet ved ligninger)

Skal du finde skæringspunktet mellem to planer (givet ved ligninger):

$$\alpha := 2x + 4y + 2z + 8 = 0$$

$$\alpha := 2x + 4y + 2z + 8 = 0 \quad (7.31)$$

$$\beta := 3x + y + 2z - 6 = 0$$

$$\beta := 3x + y + 2z - 6 = 0 \quad (7.32)$$

tjekker du først, om de to normalvektorer er parallelle – hvilket de umiddelbart set ikke at være.

Det nemmeste er nok at løse direkte (2 ligninger med 3 ubekendte)

$$\text{solve}(\{\alpha, \beta\}, \{x, y, z\})$$

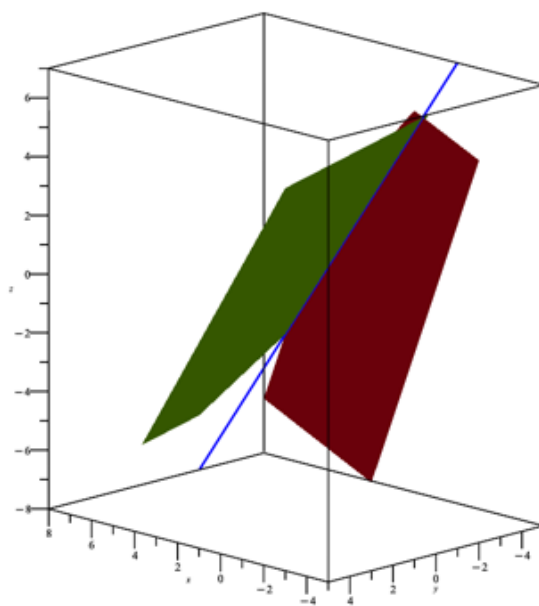
$$\{x = 14 + 3y, y = y, z = -18 - 5y\} \quad (7.33)$$

Sætter vi $y = t$, kan denne løsning udtrykkes således

$$m(t) := \langle 14, 0, -18 \rangle + t \cdot \langle 3, 1, -5 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 14, 0, -18 \rangle + t \cdot \langle 3, 1, -5 \rangle \quad (7.34)$$

hvilket er en parameterfremstilling for skæringslinjen:



Alternativ metode

Alternativt kan skæringslinjen udregnes ved at bestemme linjens retningsvektor som krydsprodukt af planernes normalvektorer, og udregne et punkt på linjen (der er brugt literal index. Shift__)

$$\vec{n}_\alpha := \langle 2, 4, 2 \rangle :$$

$$\vec{n}_\beta := \langle 3, 1, 2 \rangle :$$

$$\vec{r} := \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$

$$\vec{r} := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Dette er dog ikke den samme retningsvektor, som ovenfor, men de er dog proportionale med proportionalitetsfaktoren 2.

Vi mangler blot et punkt på linjen. Dette kan bestemmes ved (om muligt) at sætte $y = 0$ i de to ligninger, og løse mht. x og z :

$$\begin{aligned} \text{subs}(y = 0, \alpha) \\ 2x + 8 + 2z = 0 \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \text{subs}(y = 0, \beta) \\ 3x - 6 + 2z = 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \text{solve}(\{2x + 8 + 2z = 0, x = 14, z = -18\}, \{x, z\}) \\ \{x = 14, z = -18\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Dvs., at punktet bliver $(14, 0, -18)$. Altså det samme som ovenfor.

Vinkel mellem to planer

$$\begin{aligned} \alpha := 2x + 4y + 2z + 8 = 0 \\ \alpha := 2x + 4y + 2z + 8 = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} \beta := 3x + y + 2z - 6 = 0 \\ \beta := 3x + y + 2z - 6 = 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Normalvektorerne for de to planer er:

$$\vec{n}_\alpha := \langle 2, 4, 2 \rangle :$$

$$\vec{n}_\beta := \langle 3, 1, 2 \rangle :$$

Vinklen mellem de to planer kan nemt findes som vinklen mellem de to normalvektorer

with(Gym) :

$$\text{vinkel}(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = 40.20296587$$

Skæring mellem plan (givet ved en ligning) og linje

En plan er givet ved ligningen:

$$\alpha := 2x + 3y - z - 7 = 0$$

og en linje er givet ved parameterfremstillingen:

$$l(t) := \langle 2, 4, -3 \rangle + t \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 2, 4, -3 \rangle + t \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle \quad (7.41)$$

Skæringen mellem planen og linjen findes ved at sætte parameterfremstillingen ind i planens ligning, og løse mht. t . Denne løsning indsættes i linjens parameterfremstilling, og punktet findes:

$$\text{subs}(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, \alpha)$$

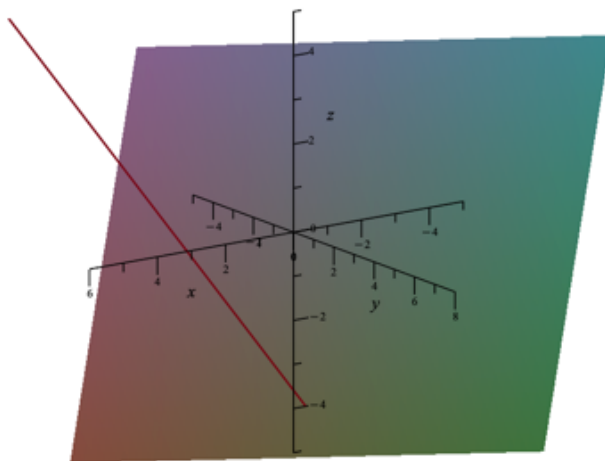
$$12 - 6t = 0 \quad (7.42)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = 2\}$$

$$l(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så linjen skærer planen i punktet $(4, 0, 1)$.



Vinkel mellem linje og plan

En plan er givet ved ligningen

$$\alpha := 2x + 3y - z - 7 = 0$$

$$\alpha := 2x + 3y - z - 7 = 0 \quad (7.43)$$

og en linje er givet ved parameterfremstillingen

$$l(t) := \langle 2, 4, -3 \rangle + t \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 2, 4, -3 \rangle + t \cdot \langle 1, -2, 2 \rangle \quad (7.44)$$

Vinklen mellem linjen og planen kan findes som komplementvinklen til vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor:

$$\vec{n} := \langle 2, 3, -1 \rangle : \vec{r} := \langle 1, -2, 2 \rangle :$$

with(Gym) :

$$|90 - \text{vinkel}(\vec{n}, \vec{r})| = 32.3115333$$

Afstand fra punkt til plan

Afstanden fra en plan med ligningen $\alpha := a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ til et punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ findes ved at indsætte P 's koordinater i venstresiden af planens ligning (dette tal giver kun 0, hvis P ligger i planen), og dividere dette tal med længden af planens normalvektor.

Formlen er denne

$$\text{dist} = \frac{|a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Et konkret eksempel:

$$\alpha := 2x - y - 2z + 3 = 0$$

$$\alpha := 2x - y - 2z + 3 = 0 \quad (7.45)$$

$$P := [3, 5, -7] :$$

Planens normalvektor aflæses til

$$\vec{n} := \langle 2, -1, -2 \rangle :$$

Afstanden bliver da (husk *len* ligger i Gym-pakken):

$$\frac{|\text{subs}(\{x=3, y=5, z=-7\}, \text{lhs}(\alpha))|}{\text{længde}(\vec{n})} = 6$$

Med Gym-pakken (afstand)

Ved at bruge de navne, vi har indført ovenfor:

$$\text{afstand}(P, \alpha) = 6$$

eller ved at bruge koordinater og ligningen direkte:

$$\text{afstand}([3, 5, -7], 2x - y - 2z + 3 = 0) = 6$$

Afstand mellem to parallelle planer

Vi kan bruge formlen for afstanden fra et punkt til en plan til at finde afstanden mellem to parallelle planer: Vi finder et punkt i den ene plan og finder afstanden til den anden plan.

Lad de to planer være givet ved:

$$\alpha := 2x + 4y + 2z - 4 = 0 :$$

$$\beta := -3x - 6y - 3z + 15 = 0 :$$

Først tjekker vi, om de to planer er parallelle:

Normalvektorerne for de to planer kan aflæses til:

$$\vec{n}_\alpha := \langle 2, 4, 2 \rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_\beta := \langle -3, -6, -3 \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Det ses umiddelbart, at koordinaterne i de to vektorer er proportionale med proportionalitetsfaktoren $-\frac{3}{2}$, altså at $\vec{n}_\beta = -\frac{3}{2} \cdot \vec{n}_\alpha$.

Dvs., at de to normalvektorer er parallelle og dermed er de to planer parallelle.

Vi finder et punkt i planen α . Her er det nemmeste at tage skæringspunktet med en af akserne – fx z -aksen. Det gør vi ved at sætte $x = 0$ og $y = 0$ i ligningen for planen α og løse den ligning, der kommer frem:

$$\begin{aligned} \text{subs}(\{x=0, y=0\}, \alpha) \\ \qquad \qquad \qquad -4 + 2z = 0 \end{aligned} \tag{7.46}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{solve}} \\ \qquad \qquad \qquad \{z=2\} \end{aligned} \tag{7.47}$$

Vi er nu klar til at indsætte i formlen for afstanden fra et punkt til en linje:

$$\begin{aligned} \text{dist} &= \frac{|\text{subs}(\{x=0, y=0, z=2\}, \text{lhs}(\beta))|}{\text{længde}(\vec{n}_\beta)} = \\ & \qquad \qquad \qquad \text{dist} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned} \tag{7.48}$$

Med Gym-pakken (afstand)

$$\text{afstand}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

I stedet for at bruge navnene, α og β , kan de to ligninger benyttes direkte:

$$\text{afstand}(2x + 4y + 2z - 4 = 0, -3x - 6y - 3z + 15 = 0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Projektion af et punkt på en plan

Lad planen være givet ved ligningen

$$\alpha := 2x - y - 2z + 3 = 0 = 2x - y - 2z + 3 = 0$$

og et punkt ved

$$P := [3, 5, -7] :$$

Vi skal bestemme projektionen af P på α : Ideen er at lave en linje l gennem P og vinkelret på α . Skæringspunktet mellem l og α må da være projektionspunktet.

Planens normalvektor aflæses til

$$\vec{n} := \langle 2, -1, -2 \rangle :$$

Linjen l får da parameterfremstillingen:

$$l(t) := \langle 3, 5, -7 \rangle + t \cdot \vec{n}$$

$$l := t \mapsto \langle 3, 5, -7 \rangle + t \cdot \vec{n} \quad (7.49)$$

Skæringspunktet mellem l og α bestemmes

$$\text{subs}(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, \alpha)$$

$$18 + 9t = 0 \quad (7.50)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = -2\}$$

$$l(-2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dvs., at projektionspunktet bliver $(-1, 7, -3)$.

7.3 Planens parameterfremstilling

Beskrivelse, eksempel og plot

Som ved linjens parameterfremstilling er de også her mest bekvemt af beskrive parameterfremstillingen for en plan ved en funktion, men denne gang en funktion $R^2 \rightarrow R^3$, altså en funktion, der til ethvert talpar tilordner en 3D-vektor.

Fx beskrives denne parameterfremstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

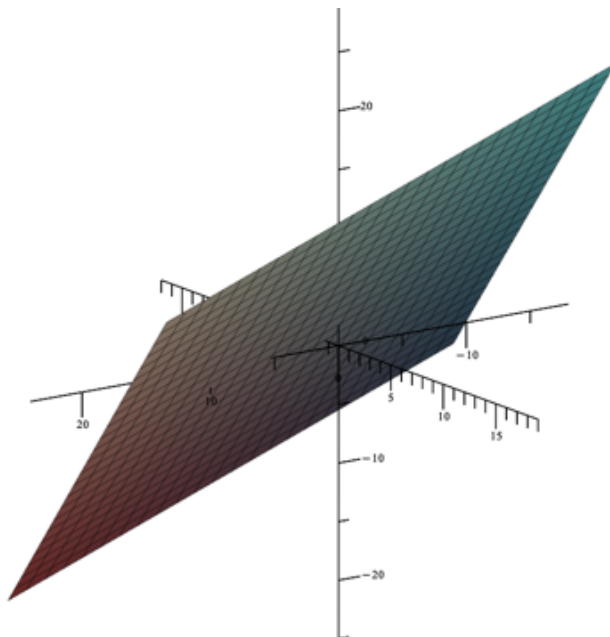
ved funktionen

$$pl(s, t) := \langle 3, 1, 2 \rangle + s \cdot \langle 2, 5, 6 \rangle + t \cdot \langle -5, 1, 3 \rangle$$

$$pl := (s, t) \mapsto \langle 3, 1, 2 \rangle + s \cdot \langle 2, 5, 6 \rangle + t \cdot \langle -5, 1, 3 \rangle \quad (7.51)$$

Planen tegnes med *plot3d* kommandoen fra *plots*-pakken ved at indsætte de tre koordinatfunktioner i en liste, og angive intervallet for de to parametre *s* og *t*:

$$with(plots) : plot3d([pl(s, t)_1, pl(s, t)_2, pl(s, t)_3], s = -3 .. 3, t = -3 .. 3, axes = normal)$$



Planens parameterfremstilling ud fra 3 punkter i planen

Planen α indeholder punkterne

$$A := [1, 1, 6] : B := [1, 3, 6] : C := [-2, 6, 0] :$$

Vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ må da være vektorer i planen. Disse kan findes således:

$$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Da disse er ikke-parallelle, udspænder de planen α :

$$\alpha(s, t) := \langle A \rangle + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\alpha := (s, t) \mapsto \langle A \rangle + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \quad (7.52)$$

$$\alpha(s, t)$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3t \\ 1 + 2s + 5t \\ 6 - 6t \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

Skæring mellem to planer givet ved parameterfremstillinger

To planer er givet ved parameterfremstillingerne

$$l(s, t) := \langle 0, -2, 0 \rangle + s \cdot \langle -4, 0, 4 \rangle + t \cdot \langle 0, -2, 4 \rangle$$

$$l := (s, t) \mapsto \langle 0, -2, 0 \rangle + s \cdot \langle -4, 0, 4 \rangle + t \cdot \langle 0, -2, 4 \rangle \quad (7.54)$$

$$m(s, t) := \langle 0, 0, 3 \rangle + s \cdot \langle -2, 6, 0 \rangle + t \cdot \langle -2, 0, 3 \rangle$$

$$m := (s, t) \mapsto \langle 0, 0, 3 \rangle + s \cdot \langle -2, 6, 0 \rangle + t \cdot \langle -2, 0, 3 \rangle \quad (7.55)$$

Skæringen mellem de to planer findes stort set på samme måde som skæringen mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger, hvor der indføres forskellige navne for parametrene - og de to parameterfremstillinger sættes lig med hinanden:

$$l(s, t) = m(u, v)$$

$$\begin{bmatrix} -4s \\ -2 - 2t \\ 4s + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u - 2v \\ 6u \\ 3 + 3v \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

Herved fremkommer tre ligninger med fire ubekendte. Et sådan system af ligninger har uendelig mange løsninger, så hvis vi løser med hensyn til de tre af variablene (fx s , t og v), så får vi løsningerne udtrykt i termer af den fjerde variabel u .

$$\text{solve}(l(s, t) = m(u, v), \{s, t, u\})$$

$$\left\{ s = -\frac{7}{20} + \frac{9}{20}v, t = \frac{11}{10} + \frac{3}{10}v, u = -\frac{7}{10} - \frac{v}{10} \right\} \quad (7.57)$$

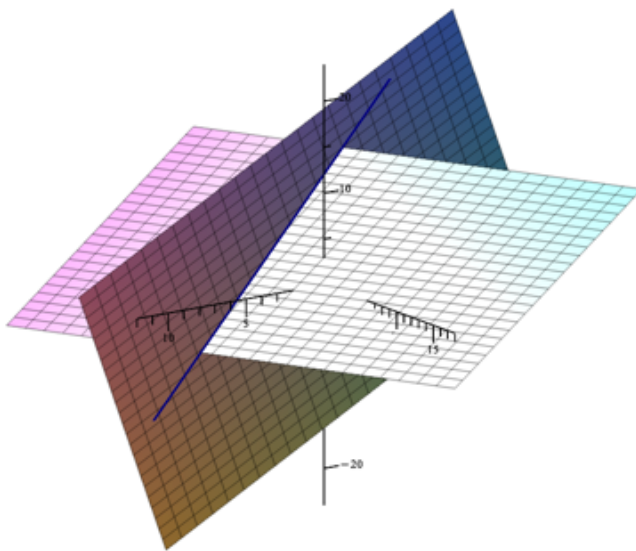
Indsættes værdierne for s og t i parameterfremstillingen l - eller værdien for u parameterfremstillingen m får vi parameterfremstillingen for skæringslinjen:

$$\text{line}(v) := l\left(-\frac{7}{20} + \frac{9}{20}v, \frac{11}{10} + \frac{3}{10}v\right)$$

$$\text{line} := v \mapsto l\left(-\frac{7}{20} + \frac{9 \cdot v}{20}, \frac{11}{10} + \frac{3 \cdot v}{10}\right) \quad (7.58)$$

$$\text{line}(v)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} - \frac{9}{5}v \\ -\frac{21}{5} - \frac{3}{5}v \\ 3 + 3v \end{bmatrix} \quad (7.59)$$



(Hvis du vil se kommandoerne, der frembringer nedenstående plot, så gå til **Edit**-fanen og klik på knappen **Show**. Vælg her **Show Command**)

Hvis du synes, at dette er for langhåret, så kan du jo altid omforme parameterfremstillingerne for α og β til ligninger, og benytte metoden beskrevet under planens ligning.

7.4 Kuglens ligning

Beskrivelse, eksempel og plot

Ligningen for en kugle med centrum i $C(a, b, c)$ og med radius r er givet ved ligningen

$$K := (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 :$$

Oftentimes vil du få denne på ekspanderet form:

expand (K)

$$a^2 - 2 x a + b^2 - 2 y b + c^2 - 2 z c + x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (7.60)$$

– og så er din opgave at genskabe standardformen, hvor centrum og radius umiddelbart fremgår.

Kommandoen *complete square* klarer let denne opgave. Sørg i den forbindelse for, at du har 0 på højresiden.

$$\text{Fx } x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 39 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (x + 3)^2 + y^2 + z^2 - 8y - 48 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (y - 4)^2 + (x + 3)^2 + z^2 - 64 = 0$$

(Vælg i kontekstmenuen først Compete Square med hensyn til x , herefter vælger du Complete Square med hensyn til y . Hvis der havde været et z -led i ligningen, så skulle du også udføre Complete Square med hensyn til z)

Heraf ses, at $C(-3, 4, 0)$ og $r = 8$.

Med Gym-pakken:

Her går det noget nemmere og du får leddene i standardformen til at stå i den forventede rækkefølge:

with(Gym) :

$$\text{omskrivKugle}(x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 39 = 0)$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 64 \quad (7.61)$$

Her er det liggyldigt, om du har 0 stående på højre side:

$$\text{omskrivKugle}(x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y = 39)$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 64 \quad (7.62)$$

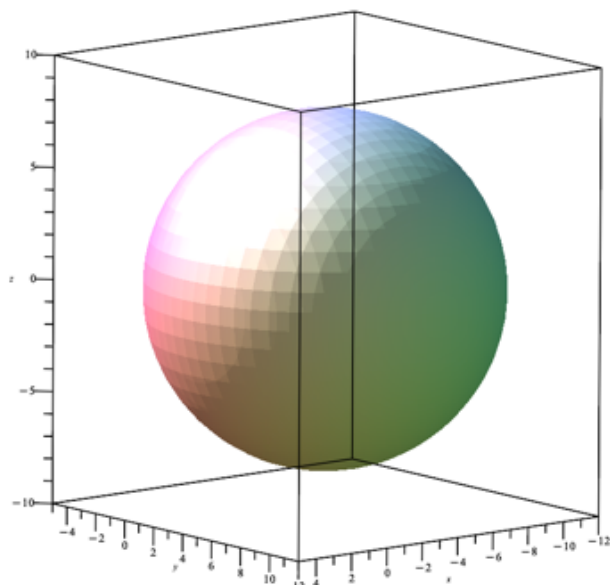
Plot af en kugle

En kugle tegnes ganske let med *implicitplot3d* :

with($plots$) :

$$\text{implicitplot3d}(x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 39 = 0, x = -12 .. 5, y = -5 .. 12, z = -10 .. 10,$$

(7.63)



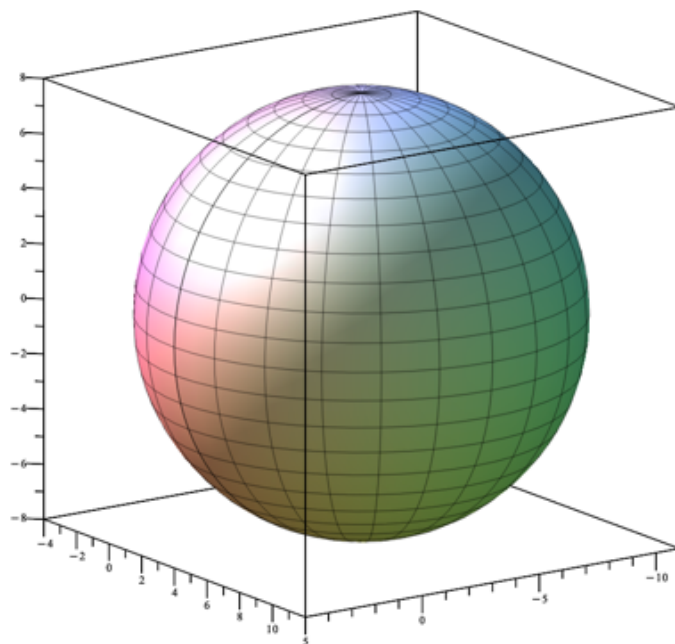
En mere fiks og færdig kommando til at tegne kugler med finder du i *plottools* pakken. Denne kræver dog, at du kender centrum og radius:

with(plottools) :

with(plots) :

kugle := sphere([-3, 4, 0], 8) : #husk kolon (:) her - ellers vælter hele plotstrukturen ud

display(kugle, scaling = constrained, axes = boxed, size = [500, 500])



Skæring mellem kugle og linje

$$K := (x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

$$K := (x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \quad (7.64)$$

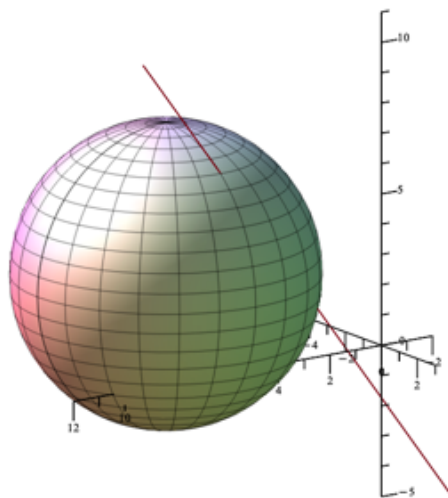
$$l(t) := \langle -5, 1, -9 \rangle + t \cdot \langle 3, 0, 4 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle -5, 1, -9 \rangle + t \cdot \langle 3, 0, 4 \rangle \quad (7.65)$$

$$kugle := sphere([7, -2, 3], 5) :$$

$$pl := spacecurve([l(t)_1, l(t)_2, l(t)_3], t = 1 .. 5, thickness = 2, color = "Burgundy") :$$

$$display([kugle, pl], scaling = constrained, axes = boxed, axes = normal, size = [500, 500])$$



Skæringspunkterne bestemmes således

$$subs(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, K)$$

$$(-12 + 3t)^2 + 9 + (-12 + 4t)^2 = 25 \quad (7.66)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{t = 4\}, \left\{t = \frac{68}{25}\right\} \quad (7.67)$$

$$l(4) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$l\left(\frac{68}{25}\right) = \begin{bmatrix} \frac{79}{25} \\ 1 \\ \frac{47}{25} \end{bmatrix}$$

Altså er skæringspunkterne $(7, 1, 7)$ og $\left(\frac{79}{25}, 1, \frac{47}{25}\right)$.

Skæring mellem kugle og plan

Ved skæring mellem en kugle og en plan fremkommer en cirkel eller et punkt. I det sidste tilfælde siges planen at tangere kuglen. Lad os se på et eksempel:

$$K := (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 25$$

$$K := (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 25 \quad (7.68)$$

$$\alpha := 4x - y - 8z + 15 = 0$$

$$\alpha := 4x - y - 8z + 15 = 0 \quad (7.69)$$

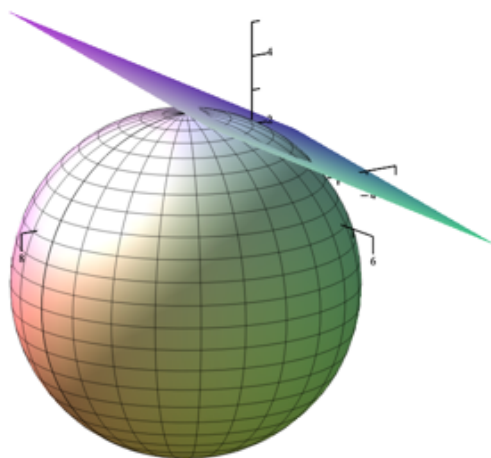
Vi kan nemt checke, om planen skærer kuglen. I så fald skal afstanden fra kuglens centrum til planen være mindre end kuglens radius:

$$d := \frac{|\text{subs}(\{x=3, y=1, z=-2\}, \text{lhs}(\alpha))|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{14}{3}$$

kugle := *sphere*([3, 1, -2], 5) :

pα := *implicitplot3d*(*α*, *x* = -5 .. 5, *y* = -5 .. 5, *z* = -5 .. 5, *style* = *surface*) :

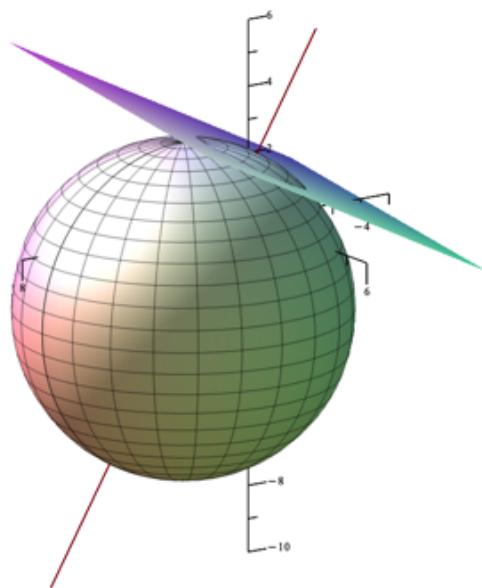
display([*kugle*, *pα*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *boxed*, *axes* = *normal*, *size* = [500, 500])



Skæringscirkelens centrum kan findes ved at projicere kuglens centrum på planen α . Projektionspunktet i planen findes som skæringspunktet mellem planen α og linjen l gennem cirkelens centrum og vinkelret på planen. Denne linje må da have planens normalvektor som retningsvektor.

$$l(t) := \langle 3, 1, -2 \rangle + t \cdot \langle 4, -1, -8 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 3, 1, -2 \rangle + t \cdot \langle 4, -1, -8 \rangle \quad (7.70)$$



Vi bestemmer skæringspunktet S mellem α og linjen l (altså centrum i skæringscirklen):

$\text{subs}(\{x = l(t)_1, y = l(t)_2, z = l(t)_3\}, \alpha)$

$$42 + 81t = 0 \quad (7.71)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

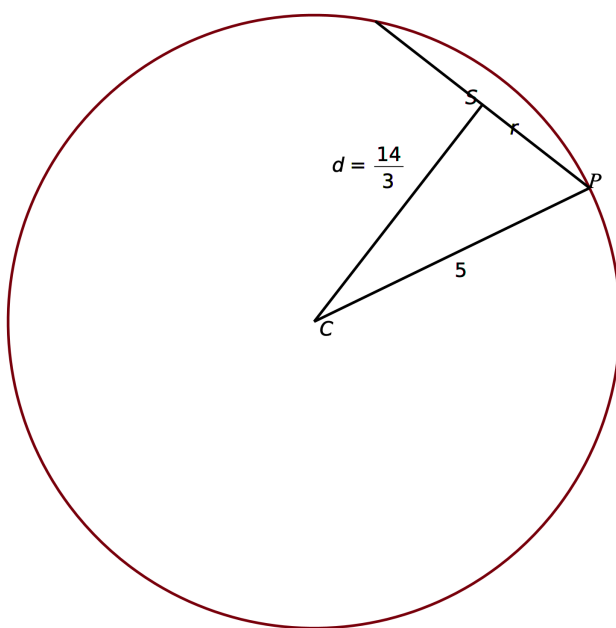
$$\left\{ t = -\frac{14}{27} \right\}$$

$$\overrightarrow{OS} := l\left(-\frac{14}{27}\right)$$

$$\overrightarrow{OS} := \begin{bmatrix} \frac{25}{27} \\ \frac{41}{27} \\ \frac{58}{27} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

Lad P være et punkt på skæringscirklen og C er kuglens centrum. Da er $|\overrightarrow{CP}| = 5$, da P jo også ligger på kuglen K . Vi kan så bestemme den sidste side i den retvinklede trekant CSP, med $\angle S$ som den rette.

Figuren viser et snit i gennem centrum i kuglen og centrum i skæringscirklen



Pythagoras giver, at
 $d^2 + r^2 = 5^2$

$$r^2 + \frac{196}{9} = 25 \quad (7.73)$$

→ solve

$$\left\{ r = \frac{\sqrt{29}}{3} \right\}, \left\{ r = -\frac{\sqrt{29}}{3} \right\}$$

Så skæringscirkelens radius er $r = \frac{1}{3} \sqrt{29}$.

Bestemmelse af skæringscirklen (Avanceret)

Lad os løse ligningerne α og K som et system af 2 ligninger med 3 ubekendte, og se, om vi kan parametrisere løsningen:

$\text{solve}(\{\alpha, K\}, \{x, y, z\})$

$$\{x = \text{RootOf}(17_Z^2 + (-64z + 106)_Z + 65z^2 - 220z + 184), y = 4 \text{RootOf}(17_Z^2 + (-64z + 106)_Z + 65z^2 - 220z + 184) - 8z + 15, z = z\} \quad (7.74)$$

→ all values

$$\left\{ x = \frac{32z}{17} - \frac{53}{17} + \frac{\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}}{17}, y = -\frac{8z}{17} + \frac{43}{17} + \frac{4\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}}{17}, z = z \right\}, \left\{ x = \frac{32z}{17} - \frac{53}{17} - \frac{\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}}{17}, y = -\frac{8z}{17} + \frac{43}{17} - \frac{4\sqrt{-81z^2 + 348z - 319}}{17}, z = z \right\}$$

Her kan vi plukke to parameterkurver ud (der er brugt copy&paste):

$$c1(z) := \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17}z + \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348z - 81z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17}z \right.$$

$$c1 := z \mapsto \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32 \cdot z}{17} + \frac{\sqrt{-319 + 348 \cdot z - 81 \cdot z^2}}{17}, \frac{43}{17} - \frac{8 \cdot z}{17} \right.$$

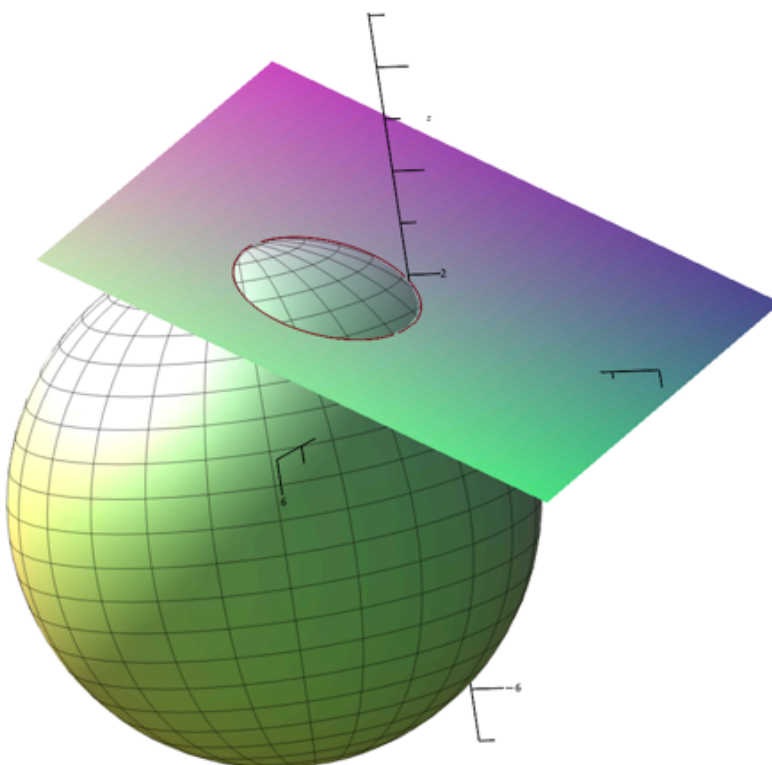
$$\left. + \frac{4 \cdot \sqrt{-319 + 348 \cdot z - 81 \cdot z^2}}{17}, z \right\rangle \quad (7.75)$$

$$c2(z) := \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32}{17}z - \frac{1}{17}\sqrt{-319 + 348z - 81z^2}, \frac{43}{17} - \frac{8}{17}z \right.$$

$$c2 := z \mapsto \left\langle -\frac{53}{17} + \frac{32 \cdot z}{17} - \frac{\sqrt{-319 + 348 \cdot z - 81 \cdot z^2}}{17}, \frac{43}{17} - \frac{8 \cdot z}{17} \right.$$

$$\left. - \frac{4 \cdot \sqrt{-319 + 348 \cdot z - 81 \cdot z^2}}{17}, z \right\rangle \quad (7.76)$$

```
kugle := sphere([3, 1, -2], 5) :
pα := implicitplot3d(α, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, style=surface) :
pc1 := spacecurve([c1(z)1, c1(z)2, c1(z)3], z=0..10, color="Burgundy", thickness=3,
  numpoints=5000) :
pc2 := spacecurve([c2(z)1, c2(z)2, c2(z)3], z=0..10, color="Burgundy", thickness=3,
  numpoints=5000) :
display([kugle, pα, pc1, pc2], scaling=constrained, axes=boxed, axes=normal, size
  = [500, 500])
```



8 Normalfordelingen

8.1 Data

Data består her af resultatet af en vejning af 500 personer.

Data vil her blive behandlet som et grupperet observationssæt, hvor vi selv laver grupperingen og Maple laver optællingen i grupper.

```
data := [ 74.53, 67.80, 65.93, 65.28, 78.37, 70.05, 68.41, 68.06, 62.48, 74.44, 64.38, 81.88, 54.13, 71.39,
75.11, 73.86, 75.08, 73.62, 68.16, 59.48, 59.36, 76.37, 62.02, 69.17, 76.16, 65.68, 66.35, 83.68, 70.35,
62.97, 70.49, 70.30, 71.94, 66.13, 75.68, 70.36, 63.50, 64.09, 65.95, 79.44, 57.90, 64.87, 77.17, 61.36,
57.03, 72.95, 71.51, 59.59, 67.28, 75.41, 67.98, 67.98, 77.58, 77.68, 62.43, 58.59, 70.87, 68.61, 74.54,
82.89, 63.60, 71.93, 71.88, 71.02, 77.05, 68.64, 89.48, 75.01, 74.32, 75.32, 67.79, 71.23, 74.72, 84.41,
73.58, 82.03, 63.29, 69.07, 69.74, 75.91, 76.49, 73.68, 73.39, 64.58, 75.98, 72.66, 76.27, 62.34, 64.63,
71.13, 67.53, 72.24, 79.80, 73.84, 77.81, 75.02, 73.99, 62.41, 65.18, 72.79, 66.57, 70.17, 68.98, 75.47,
73.44, 58.52, 78.76, 63.14, 78.82, 79.68, 71.99, 61.78, 80.92, 62.63, 64.80, 66.32, 70.06, 81.70, 59.47,
65.94, 60.88, 68.70, 68.06, 52.81, 81.10, 68.90, 56.25, 64.07, 62.18, 72.05, 88.77, 57.25, 68.37, 77.90,
71.58, 82.59, 69.01, 79.33, 66.69, 68.81, 72.51, 71.39, 68.68, 70.71, 58.42, 74.92, 70.53, 78.38, 68.56,
76.59, 71.67, 67.88, 69.49, 81.05, 59.51, 81.18, 62.52, 69.44, 75.97, 65.45, 77.00, 73.87, 70.42, 71.77,
64.43, 79.25, 71.04, 67.39, 84.27, 60.53, 65.19, 80.37, 73.95, 73.01, 55.43, 76.24, 68.24, 70.44, 76.59,
59.62, 64.96, 75.78, 79.79, 64.60, 64.21, 71.06, 67.05, 65.93, 69.64, 65.84, 70.20, 83.86, 69.30, 63.93,
73.49, 80.36, 60.01, 76.99, 65.46, 72.74, 66.76, 61.79, 66.28, 71.12, 79.16, 63.00, 61.83, 79.57, 62.33,
81.55, 62.88, 57.28, 65.08, 64.50, 69.57, 64.55, 65.36, 80.49, 63.76, 71.89, 68.77, 64.91, 74.82, 65.33,
64.02, 62.17, 75.52, 65.51, 67.44, 67.74, 66.40, 60.35, 75.40, 76.41, 83.53, 69.92, 63.61, 71.29, 71.09,
71.70, 61.70, 69.14, 80.62, 59.61, 66.15, 70.52, 68.00, 66.92, 67.75, 67.85, 69.19, 80.16, 68.56, 66.37,
76.97, 88.08, 81.27, 67.97, 73.35, 83.31, 57.61, 59.52, 66.74, 72.77, 70.32, 80.34, 74.03, 58.27, 71.67,
74.72, 68.70, 84.24, 71.94, 71.14, 65.38, 66.25, 63.20, 64.53, 67.70, 69.45, 66.50, 70.61, 65.81, 63.68,
77.50, 77.67, 66.25, 65.08, 74.62, 67.40, 75.87, 74.12, 65.61, 61.80, 71.43, 77.40, 63.29, 72.96, 69.65,
66.24, 61.39, 59.06, 60.01, 76.07, 62.37, 67.93, 64.08, 68.35, 68.41, 65.61, 63.44, 76.75, 61.73, 61.66,
77.15, 65.67, 75.05, 75.14, 80.21, 84.97, 72.65, 76.02, 65.95, 79.32, 74.61, 65.92, 54.66, 67.29, 74.99,
73.56, 73.43, 52.25, 76.94, 77.50, 73.31, 66.78, 58.60, 60.51, 68.32, 80.96, 52.73, 60.68, 69.44, 72.04,
75.12, 76.51, 69.82, 72.91, 72.01, 68.12, 55.06, 65.62, 75.31, 73.69, 67.89, 66.06, 66.50, 71.18, 77.45,
69.23, 66.05, 65.01, 68.95, 72.31, 72.20, 73.40, 73.57, 73.67, 73.87, 71.86, 72.03, 74.99, 72.85, 70.04,
61.87, 62.62, 71.54, 59.95, 76.69, 71.77, 78.58, 83.12, 76.52, 70.52, 59.26, 79.35, 72.68, 71.12, 77.13,
71.86, 68.51, 62.58, 75.45, 67.17, 75.68, 78.54, 72.34, 79.51, 78.50, 59.07, 77.68, 75.75, 65.25, 70.32,
80.27, 63.40, 69.53, 74.34, 78.84, 65.46, 83.23, 59.87, 62.61, 73.78, 72.95, 75.35, 72.38, 79.71, 75.11,
64.04, 64.35, 72.78, 67.44, 60.54, 79.69, 75.42, 69.00, 67.15, 69.58, 74.59, 72.08, 69.03, 59.85, 64.84,
64.12, 74.64, 64.66, 74.97, 76.87, 56.17, 83.38, 65.96, 64.14, 64.85, 68.99, 67.54, 62.60, 69.31, 76.10,
64.63, 74.94, 71.37, 68.00, 74.20, 66.31, 70.28, 58.16, 63.84, 78.69, 58.80, 69.35, 69.24, 75.50, 67.41,
69.62, 68.15, 67.36, 74.93, 74.89, 58.35, 79.08, 64.41, 71.77, 59.29, 60.67, 80.16, 77.03, 67.01, 72.91,
64.03, 78.68, 71.55, 76.91, 72.22, 68.08, 70.18, 68.65, 64.37, 67.99, 64.37, 76.09, 71.17, 63.39, 71.01,
71.76, 82.65, 75.25, 70.90, 62.32, 73.93 ] :
```

8.2 Gruppering af data

with(Gym) :

Sørg for, at du har data indlæst: I sektionen ovenfor skal du klikke i data og taste Enter.

For at danne dig et overblik over data, finder du den største og den mindste observation:

$\min(\text{data}) = 52.25$

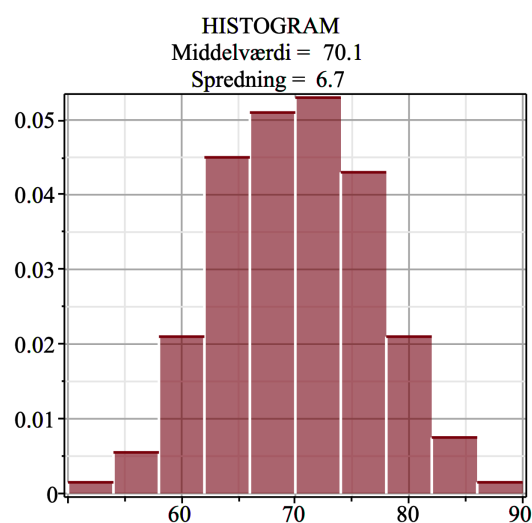
$\max(\text{data}) = 89.48$

Dette viser, at data ligger i intervallet $[50, 90]$. Dette interval skal opdeles i en række delintervaller - fx 10 - af længde 4:

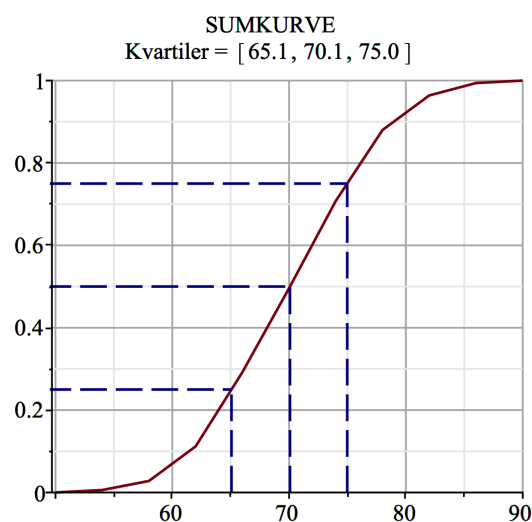
```
M := grupperData (data, [50 ..90], 10)
```

$$M := \begin{bmatrix} 50 \text{ ..}54. & 3 \\ 54. \text{ ..}58. & 11 \\ 58. \text{ ..}62. & 42 \\ 62. \text{ ..}66. & 90 \\ 66. \text{ ..}70. & 102 \\ 70. \text{ ..}74. & 106 \\ 74. \text{ ..}78. & 86 \\ 78. \text{ ..}82. & 42 \\ 82. \text{ ..}86. & 15 \\ 86. \text{ ..}90 & 3 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

```
plotHistogram (M, size = [300, 300])
```



```
plotSumkurve (M, size = [300, 300])
```



Prøv at ændre antallet af intervaller i kommandoen *grupper*, og følg, hvad der sker, når du genberegner histogrammet og i sumkurven (nedenfor).

8.3 Deskriptorer

Med Gym-pakken kan du finde de fleste deskriptorer:

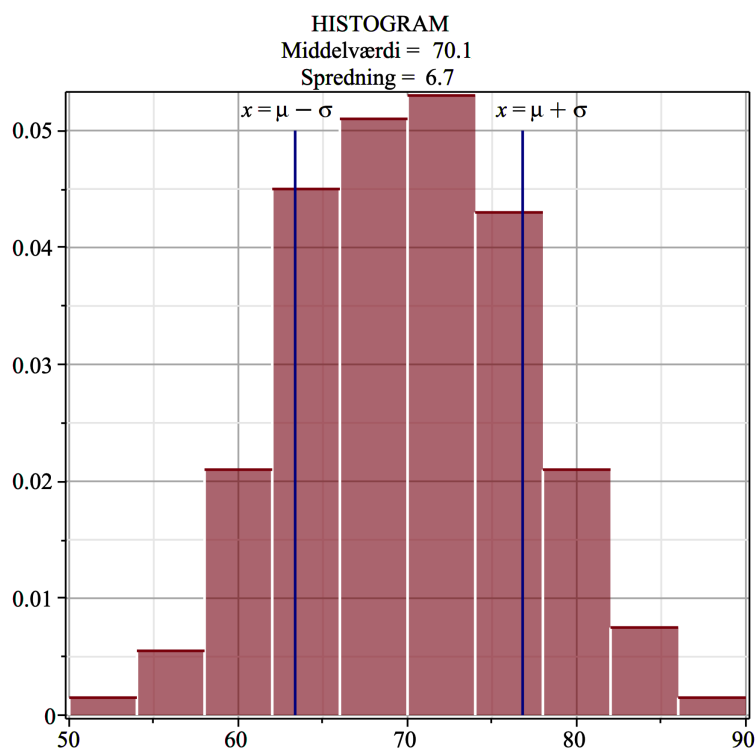
$$kvariler(M) = [65.067, 70.075, 74.977]$$

$$\mu := middel(M) = 70.08000$$

$$var := varians(M) = 45.20960$$

$$\sigma := spredning(M) = 6.72381$$

I histogrammet nedenfor er linjerne med ligningerne $x = \mu - \sigma$ og $x = \mu + \sigma$ indtegnet (de blå linjer)



(8.2)

I intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ befinder der sig ca. 66% af alle observationer – som denne udregning viser:

$$sumkurve(M, \mu + \sigma) - sumkurve(M, \mu - \sigma) = 0.655535280000000$$

8.4 Frekvensfunktionen for normalfordelingen

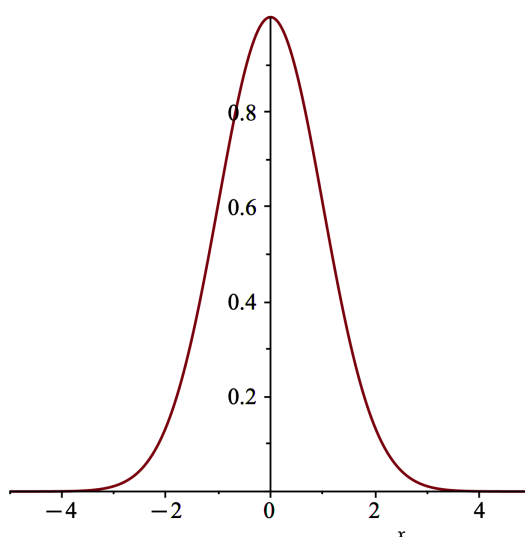
I det følgende skal vi lave forskriften for en funktion, der kan modellere formen af ovenstående histogram (en klokkekurve). Et godt udgangspunkt er funktionen

$$f(x) := e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

$$f := x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8.3)$$

der har den ønskede klokkeform:

`plot(f(x), x=-5..5, size=[300, 300])`



I al fald skal funktionen opfylde, at arealet under grafen skal være 1 – ligesom ved histogrammet. Vi bestemmer dette areal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \sqrt{2} \sqrt{\pi}$$

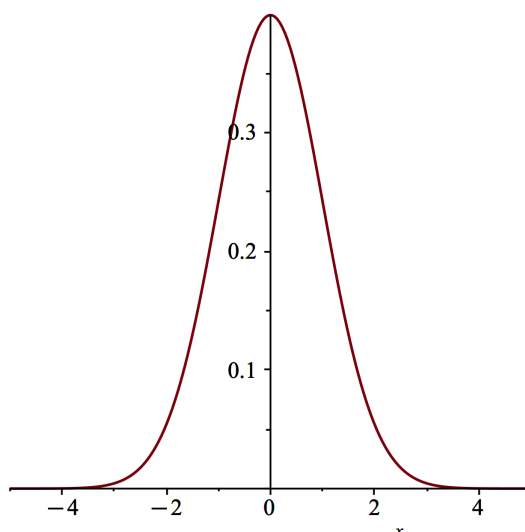
Dette viser, at f skal modificeres en smule (den modificerede funktion kalder vi φ):

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx = 1$$

Så ved at bruge ϕ i stedet, er kravet om, at arealet skal være 1, opfyldt. Sådan ser grafen for ϕ ud:

`plot( $\phi(x)$ ,  $x=-5..5$ , size = [300, 300])`



Det er klart, at grafen for ϕ efterligner et udglattet histogram med middelværdi $\mu = 0$, men hvad er spredningen? For at få en ide om dette, husker vi på, at i ovenstående histogram var ca. 66% af alle observationer i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Her skal vi så sikre os, at ca. 66% af arealet under grafen for ϕ ligger i det tilsvarende interval:

$$fsolve\left(\int_{-s}^s \phi(x) \, dx = 0.66, s = 0..2\right) = 0.9541652531$$

Dette tyder på, at spredningen her (ideelt set) er $\sigma = 1$.

Funktionen ϕ kaldes *frekvensfunktionen* for normalfordelingen med middelværdi 0 og spredning 1.

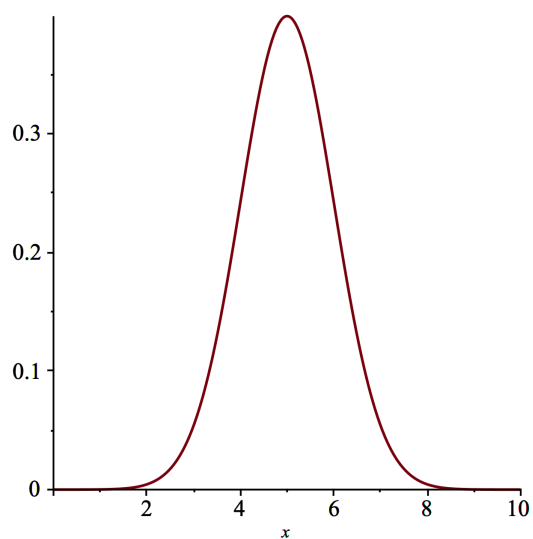
Lad os lige udregne, hvor mange procent af observationerne vi ideelt set skal forvente i $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, hvis data er normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1:

$$\int_{-1.0}^{1.0} \phi(x) \, dx = 0.6826894921$$

Dvs., hvis data er normalfordelte, må vi forvente, at ca. 68.3% af alle observationer befinder sig i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.

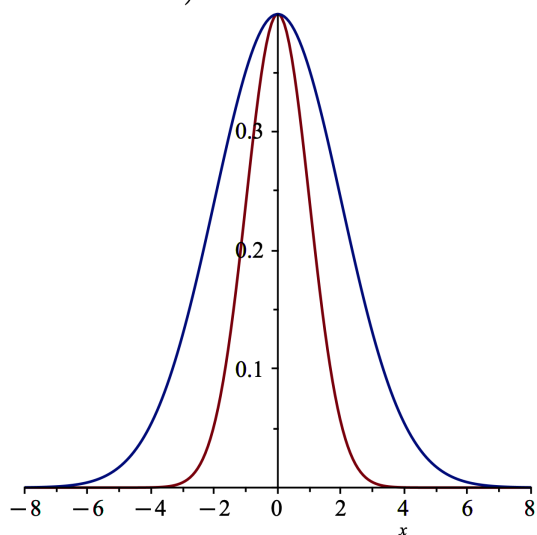
Nu mangler vi blot at få klokkekurven forskudt og deformeret så den matcher histogrammet vi har set på i de foregående afsnit. Det er ganske let at forskyde en graf langs x -aksen. Fx laver vi en forskydning af ϕ på 5 til højre ved at udregne $\phi(x - 5)$:

`plot( $\varphi(x - 5)$ ,  $x = 0 \dots 10$ ,  $size = [300, 300]$ )`



Deformationen foretages ved at gange en konstant på argumentet x , fx

`plot( $\left[ \varphi(x), \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \right]$ ,  $x = -8 \dots 8$ ,  $size = [300, 300]$ )`

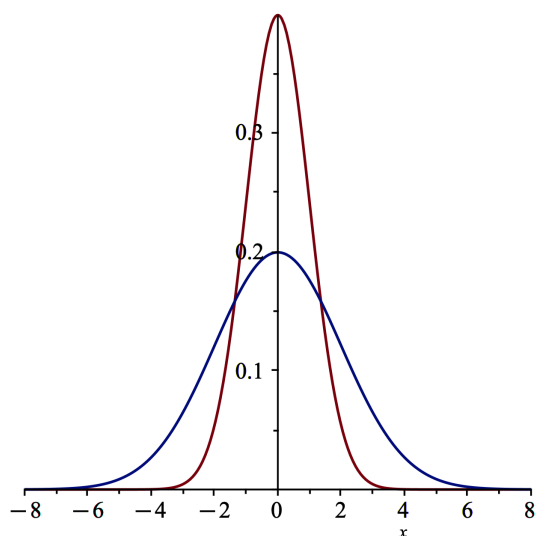


Men arealet er tilsyneladende blevet større:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) dx = 2$$

– altså præcist dobbelt stort. Da arealet under grafen skal være 1, er vi nødt til at gange $\frac{1}{2}$ på funktionen:

`plot([phi(x), 1/2 * phi(1/2 * x)], x=-8..8, size=[300, 300])`



Lad os finde spredningen i den deformerede kurve. Vi husker på, at 68.3% af arealet skal ligge i intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$:

`fsolve(integral(1/2 * phi(1/2 * x), x=-s..s) = 0.683, s = 0..4)`

2.001283658

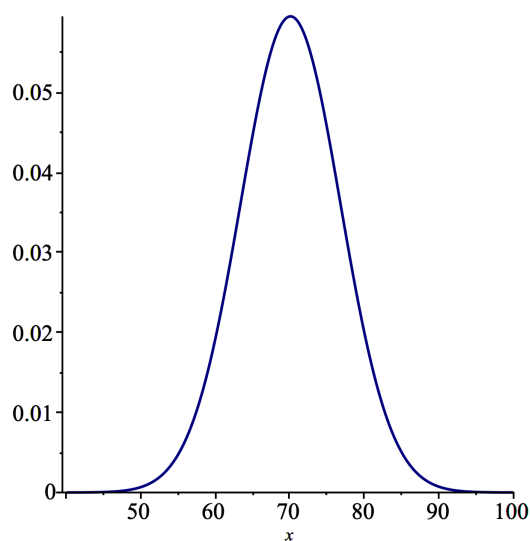
(8.4)

Herfra er der ikke langt til at konkludere, at deformationen

$$\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{1}{\sigma} x\right)$$

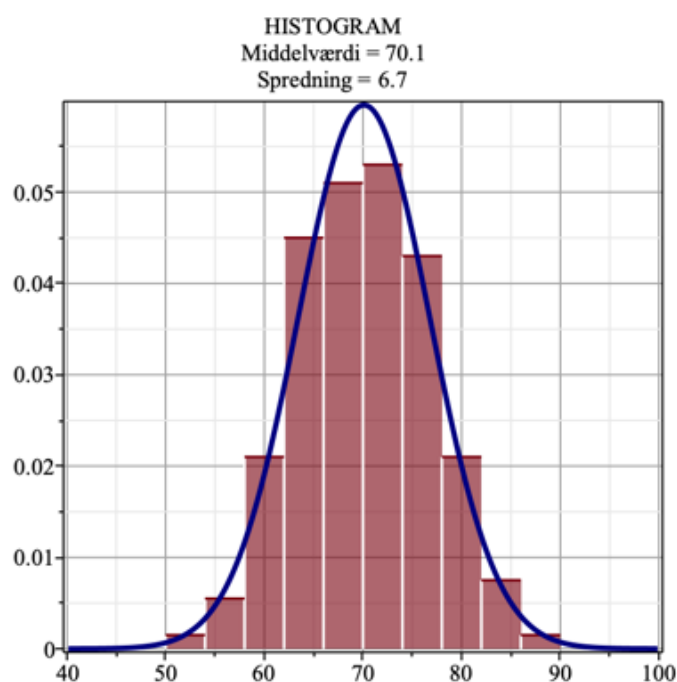
giver en klokkekurve med middelværdi 0 og spredning σ .

Kombinerer vi dette med en vandret forskydning på $\mu = 70.1$ og spredningen $\sigma = 6.7$:



Vi kan tegne denne kurve oven på histogrammet for M :

```
plots[display](plotHistogram(M), plot(1/6.7 * phi(1/6.7 * (x - 70.1)), x = 40..100, color
= "Navy", thickness = 3), size = [400, 400])
```



Inden vi går videre er det vigtigt at få rensat μ og σ . Det klarer du i **Variables**-paletten eller med kommandoen:

```
unassign('μ','σ')
```

Med rensede μ og σ kan vi få beregnet det generelle udtryk for *frekvensfunktionen* for normalfordelingen med middelværdi μ og spredning σ :

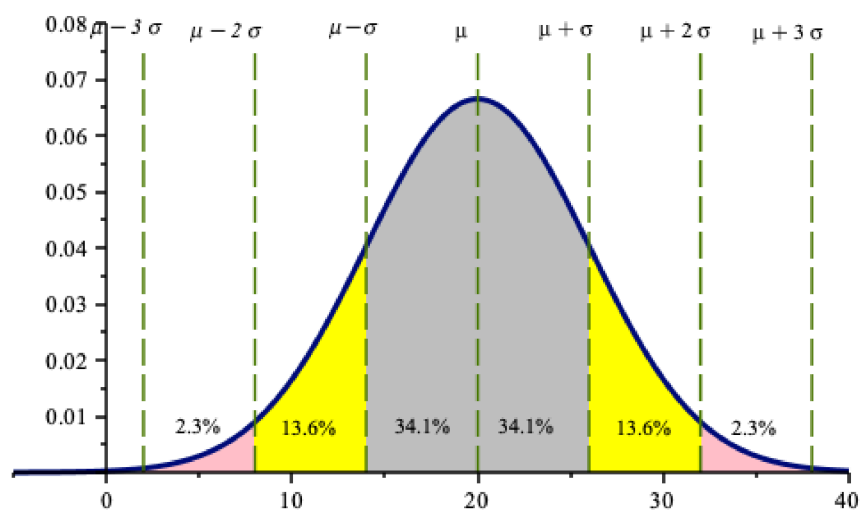
$$\frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{1}{\sigma} \cdot (x - \mu)\right) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\sigma\sqrt{\pi}}$$

Det er ikke helt sådan, du vil møde den i bøger, men den ligner. Der skal omskrives en smule – og denne funktion kalder vi ϕ (og overskriver altså den tidligere definition af ϕ)

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}:$$

På figuren nedenfor ser du, hvordan observationerne ideelt set skal fordele sig omkring middelværdien (i eksemplet er $\mu = 20$ og $\sigma = 6$):

- I intervallet $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ befinder sig 68.3% af observationerne
- I intervallet $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ befinder sig 95.4% af observationerne
- I intervallet $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ befinder sig 99.7% af observationerne



Lad os for en god ordens skyld regne efter:

$$\int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} \phi(x) dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.68269$$

$$\int_{\mu - 2\sigma}^{\mu + 2\sigma} \phi(x) dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.95450$$

$$\int_{\mu - 3\sigma}^{\mu + 3\sigma} \phi(x) dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.99730$$

8.5 Normalfordelingsfunktionen

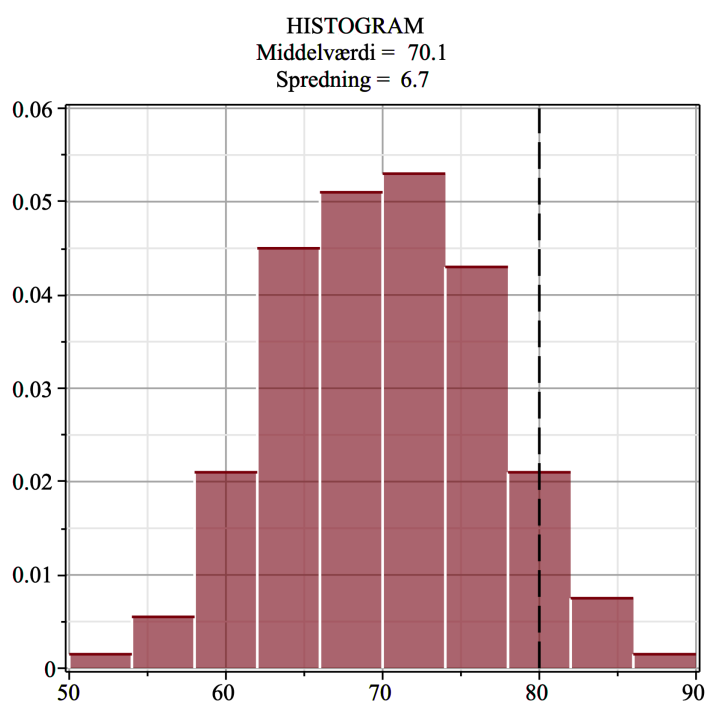
Vi minder om, at sumkurven F for et materiale er defineret ved:

$F(x)$ = den procentdel af observationerne, der er mindre end eller lig med x .

eller sagt på en anden måde: arealet af den del af histogrammet der ligger til venstre for x .

Dette kan illustreres således:

$F(80)$ er arealet af det (røde) område, der ligger til venstre for den stiplede streg i 80:



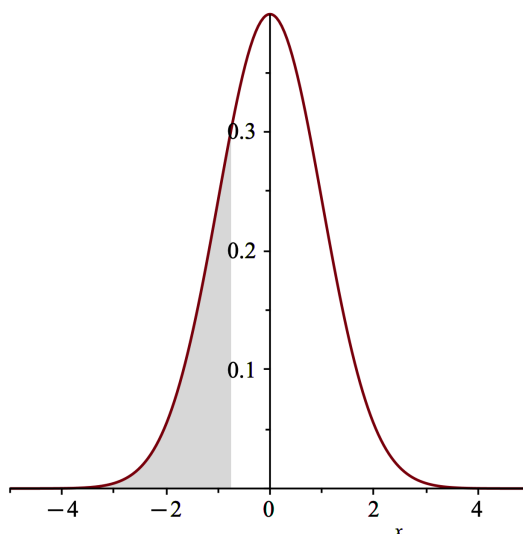
Lad os for en god ordens skyld regne arealet ud. På figuren ses, at arealet kan bestemmes som summen af arealerne af de 7 første stolper plus halvdelen af den 8. Men dette areal er jo netop værdien *sumkurve* :

$sumkurve(M, 80) = 0.9220000000000000$

I nøje analogi hermed defineres fordelingsfunktionen $\Phi(x)$ for en normalfordeling med middelværdi 0 og spredning 1 som arealet under grafen for

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} :$$

fra $-\infty$ til x .



Vi definerer altså Φ som en arealfunktion for φ (med udgangspunkt i $-\infty$)

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \varphi(t) \, dt$$

$$\Phi := x \mapsto \int_{-\infty}^x \varphi(t) \, dt \quad (8.5)$$

Vi kan ikke udtrykke en stamfunktion til φ med de funktioner, vi kender, så vi tager til takke med forskriften ovenfor.

Værdier kan sagtens udregnes (men indsætter du hele tal (dog ikke 0) får du et fælt udtryk, men så må du jo bruge *evalf*, med decimaltal er der ingen problemer

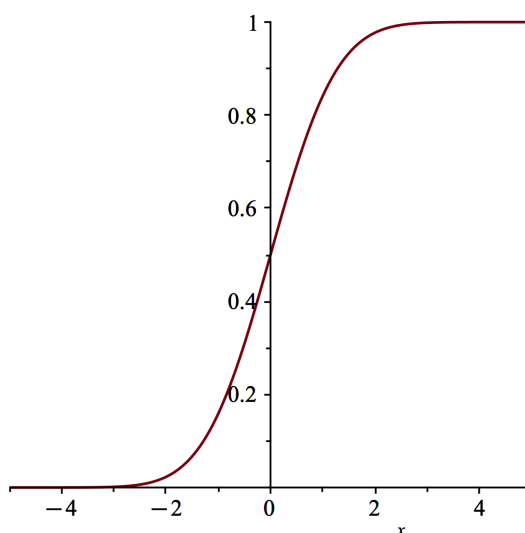
$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{evalf}(\Phi(1)) = 0.8413447455$$

$$\Phi(1.0) = 0.8413447461$$

Grafen for Φ ser sådan ud

$$\text{plot}(\Phi(x), x=-5..5, \text{size}=[300, 300])$$



Denne forskydes og deformeres på helt samme måde som ϕ . Lad os døbe den funktion, der fremkommer, F :

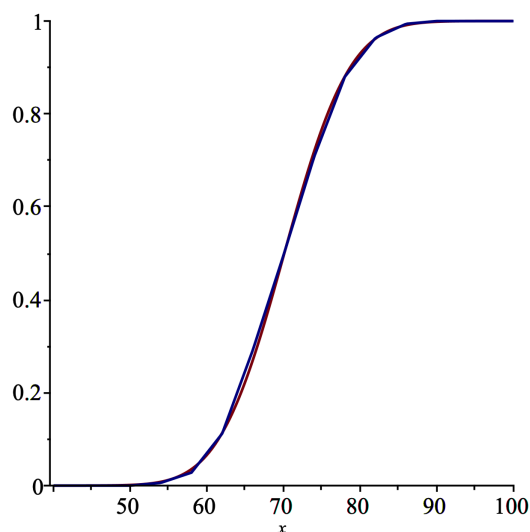
$$F(x) := \Phi\left(\frac{1}{\sigma} \cdot (x - \mu)\right)$$

$$F := x \mapsto \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (8.6)$$

Den fordelingsfunktion, der matcher sumkurven i ovenstående eksempel, er således $\Phi\left(\frac{1}{6.7} \cdot (x - 70.1)\right)$.

Indtegnet i samme koordinatsystem ser de to kurver sådan ud:

`plot([Phi(1/6.7 * (x - 70.1)), sumkurve(M, x)], x = 40 .. 100, color = ["Burgundy", "Navy"])`



8.6 Normalfordelingen i Gym-pakken

Frekvensfordelingen for en normalfordeling med middelværdi μ og spredning σ findes i Gym-pakken under navnet *normalpdf*, hvor 'pdf' står for 'probability distribution function'. Syntaksen er

normalpdf (μ, σ, x)

Tilsvarende findes fordelingsfunktionen under navnet *normalcdf*, hvor 'cdf' står for 'cumulative distribution function'. Syntaksen er

normalcdf (μ, σ, x)

Hvis μ og σ udelades, så sættes de automatisk til hhv. $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

normalcdf findes også i en 4-parameter version:

normalcdf (μ, σ, x, y)

der udregner differensen

normalcdf (μ, σ, y) - *normalcdf* (μ, σ, x)

Desuden findes der en invers normalfordeling (der forklares i eksemplet nedenfor), hvor syntaksen er

invnorm (μ, σ, x)

Hvis μ og σ udelades, så sættes de automatisk til hhv. $\mu = 0$ og $\sigma = 1$.

Eksempel 1

with(Gym) :

Hvis man vejer et stort antal poser med mel, har det vist sig, at vægten er normalfordelt med middelværdi $\mu = 500$ g og spredning $\sigma = 20$ g.

1. Hvor stor en del af poserne vejer højst 515 g? $\text{normalcdf}(500, 20, 515) = 0.7733726476$

Dvs., at 77.3% af poserne vejer højst 515 g.

Alternativt (med 4-parameter versionen):

$\text{normalcdf}(500, 20, -\infty, 515) = 0.7733726476$ 2. Hvor stor en del af poserne vejer mindst 475 g?

$\text{normalcdf}(500, 20, 475) = 0.1056497738$

Altså vejer 10.6% af poserne højst 475 g. Dvs 89.4% vejer mindst 475 g.

Du kan naturligvis klare det i et hug ved at udregne

$1 - \text{normalcdf}(500, 20, 475) = 0.8943502262$

Alternativt (med 4-parameter versionen):

$\text{normalcdf}(500, 20, 475, \infty) = 0.8943502262$

3. Hvor stor en del af poserne vejer mellem 495 g og 505 g?

$\text{normalcdf}(500, 20, 505) - \text{normalcdf}(500, 20, 495) = 0.1974126512$

Altså 19.7% af poserne vejer mellem 495 g og 505 g.

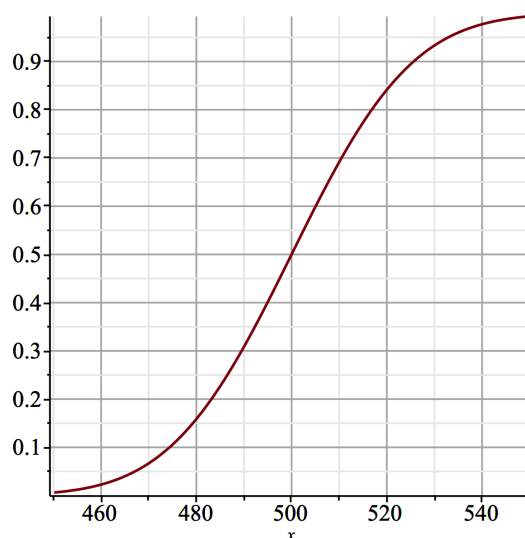
Alternativt (med 4-parameter versionen):

$\text{normalcdf}(500, 20, 495, 505) = 0.1974126513$

4. Hvor meget vejer de tungeste 20% af poserne ?

Lad os først tegne grafen for $\text{normalcdf}(500, 20, x)$:

$\text{plot}(\text{normalcdf}(500, 20, x), x = 450 \dots 550, \text{size} = [300, 300])$



Ved aflæsning på grafen, kan vi se, at de 20% tungeste poser vejer mindst ca. 516 g.

For at beregne os frem til resultatet, skal vi løse ligningen

$$\text{normalcdf}(500, 20, x) = 0.8$$

hvor vi finder de letteste 80% af poserne.

Denne ligning kan være lidt drilsk at løse, men med *fsolve* udstyret med søgeinterval går det:

$$\text{fsolve}(\text{normalcdf}(500, 20, x) = 0.8, x = 500 \dots 540)$$

$$516.8324245$$

(8.7)

Det, vi finder her, kaldes 0.8-fraktilen. I Gym-pakken er der en funktion til bestemmelse af fraktiler i normalfordelingen

$$\text{invnorm}(500, 20, 0.8) = 516.832424671467$$

Og her går det helt problemfrit.

Alternativt (med 4-parameter versionen):

Her skal vi løse ligningen

$$\text{normalcdf}(500, 20, x, \infty) = 0.2$$

Igen er ligningen drisk, så vi hjælper til med et søgeinterval:

$$\text{fsolve}(\text{normalcdf}(500, 20, x, \infty) = 0.2, x = 500 \dots 540)$$

$$516.8324245$$

(8.8)

8.7 Tjek for normalfordelte data

Der findes flere metoder til visuelt at tjekke, om givne data er normalfordelte eller ej. Helt primitivt kunne vi gruppere data og tegne et histogram og se, om det har den ønskede klokkeform.

Det er ikke helt nemt at se, om histogrammet flader ud på den rigtige måde, men så kunne vi jo, på baggrund af data, estimere middelværdi og spredning, og på baggrund heraf, plotte histogrammet sammen med tæthedsfunktionen for normalfordelingen med den estimerede middelværdi og spredning.

Men det er meget besværligt.

QQplot

Det nemmeste at benytte er et QQplot, hvor datasættet afsættes på førsteaksen og de 'tilhørende' fraktiler i standardnormalfordelingen på andenaksen. Se detaljer om dette i online-hjælpen til Gym-pakken.

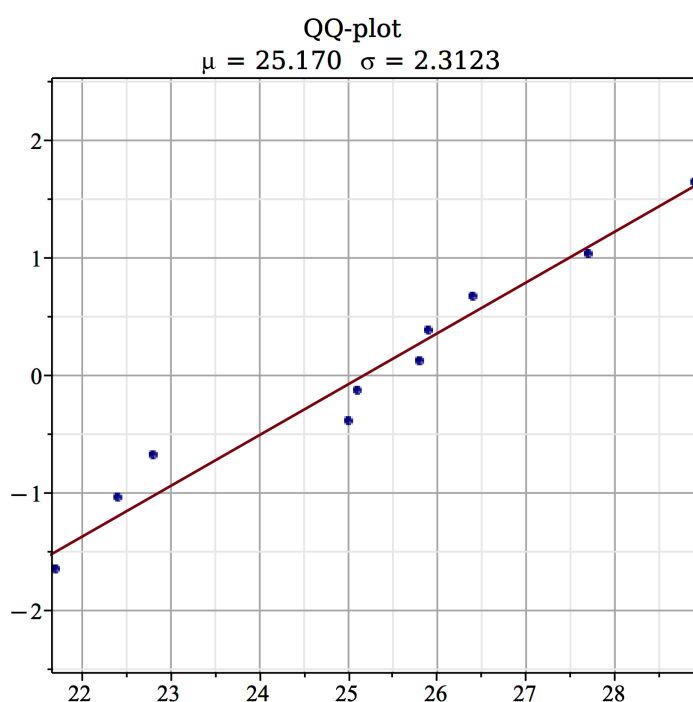
Vi ser først på et meget lille datasæt:

`with(Gym) :`

`X := [25.0, 25.1, 27.7, 25.8, 25.9, 21.7, 22.8, 28.9, 26.4, 22.4]`

`X := [25.0, 25.1, 27.7, 25.8, 25.9, 21.7, 22.8, 28.9, 26.4, 22.4]` (8.9)

`QQplot(X)`

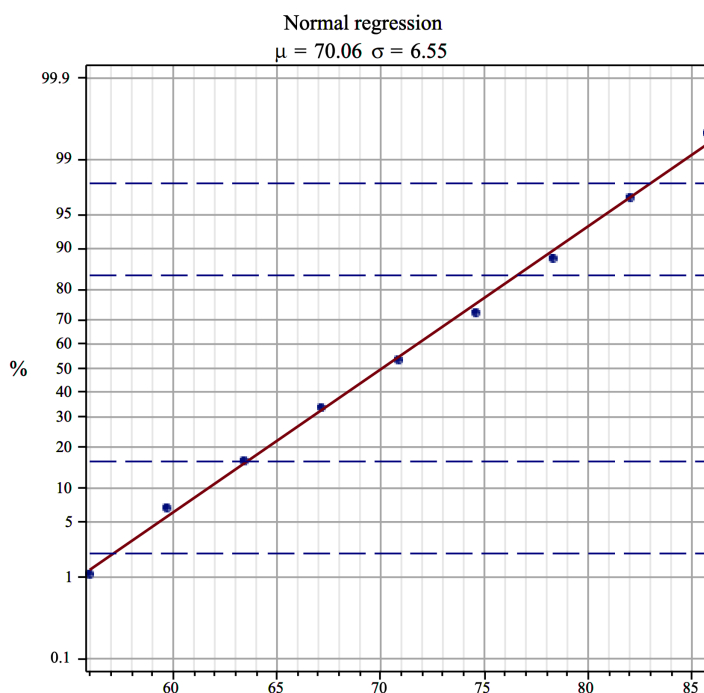


Den rette linje viser, hvor punkterne skulle ligge, hvis data var perfekt normalfordelte. Data viser ikke nogen systematisk afvigelse fra den rette linje, så her kan vi antage, at data er normalfordelte.

Normal regression

For at benytte normal regression kræves et større datasæt. Her vil vi benytte data fra en vejning af 500 personer. Data findes i den øverste sektion i dette kapitel, så hvis du vil 'regne med' her, så skal du gå til den øverste sektion og taste Enter på data, så de bliver indlæst.

Kommandoen *NormReg* vil automatisk gruppere data i 10 lige store grupper – derfor vil du kun se 9 datapunkter i plottet:



Her ses de grupperede indtegnet i et såkaldt sandsynlighedspapir. Hvis disse ligger på en ret linje, kan vi antage, at data er normalfordelte. Endvidere er beregnet den bedste rette linje gennem datapunkterne og ved hjælp af denne kan middelværdi og spredning bestemmes. Detaljer findes i online-hjælpen til *NormReg*.

$$y = \alpha \cdot x + \beta + \varepsilon$$

hvor fejleddet ε antages at være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 0 og med samme spredning for alle temperaturniveauer x . Desuden antages, at alle målinger er uafhængige.

Så for at tjekke, om vi kan antage, at der er en lineær sammenhæng mellem de to dataserier, skal vi undersøge, om

– residualerne (fejlene) er normalfordelte med middelværdi 0

– spredningen er den samme for fastholdt x .

Residualerne kan nemt findes, men matricen bliver meget stor, så den begrænses med interface-kommandoen nedenfor:

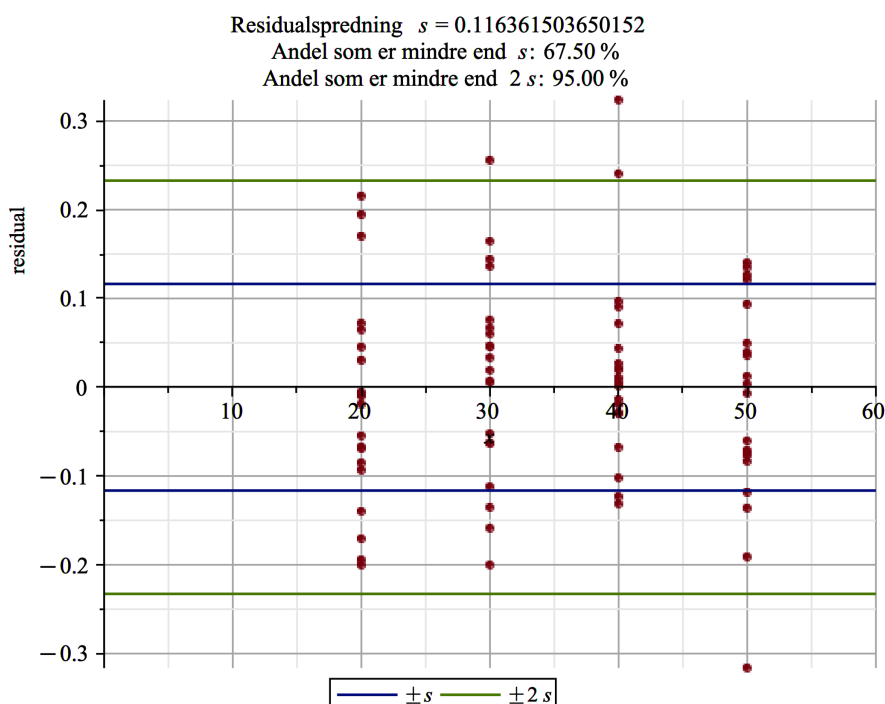
```
interface(rtablesize = [5, 2]) :
```

```
R := residualer(X, Y, LinReg)
```

$$R := \begin{bmatrix} 20 & 0.0719649238899998 \\ 20 & -0.200466597204098 \\ 20 & 0.194420920449289 \\ 20 & -0.0191528249933133 \\ 20 & -0.0933628252739832 \\ 20 & -0.0675145278177243 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

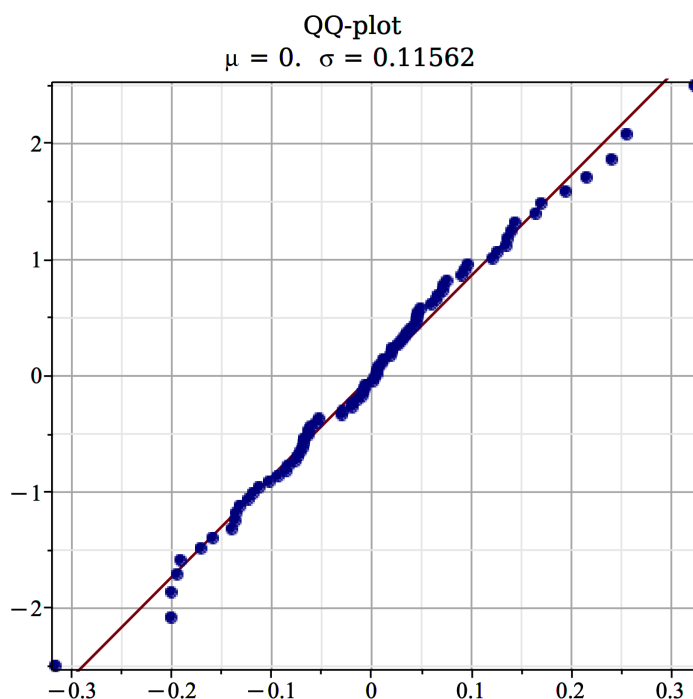
80 × 2 Matrix

Og et residualplot kan nemt laves

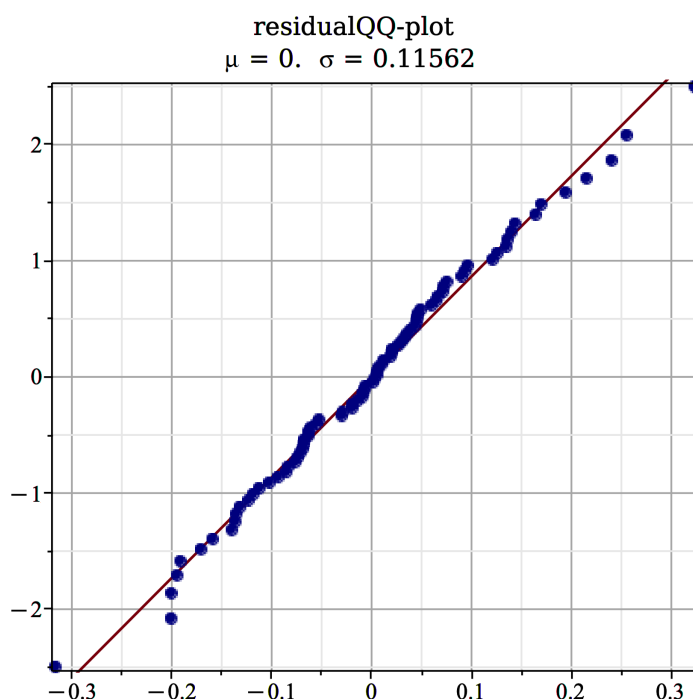


Af dette plot ses, at spredningen stort set er den samme for de 4 temperaturniveauer. Så den side af sagen er i orden. Vi mangler blot at vise, at vi kan antage, at residualerne er normalfordelte. Hertil kan vi gå to veje:

Enten at udtrække den 2. søjle i matricen *R* og benytte denne som input til kommandoen *QQplot*:



- eller at benytte kommandoen *residualQQplot* (hvor den 2. søjle i *R* udtrækkes automatisk):



Resultatet bliver det samme – og vi kan ved et kig på plottene konkludere, at residualerne er normalfordelte.

Lad os for en god ordens skyld tjekke, om middelværdien af residualerne er 0, som den jo skal være

$\text{middel}(R(\dots, 2)) = 0.$

8.9 Konfidensintervaller for a og b i en lineær regression

Vi skal her undersøge, om der er en lineær sammenhæng mellem fastende blodsukkerniveau, målt i mmol/L, og sammentrækningsevne (vfc), målt i procent pr. sekund, for venstre hjertekammer for diabetikere.

En undersøgelse har givet disse data:

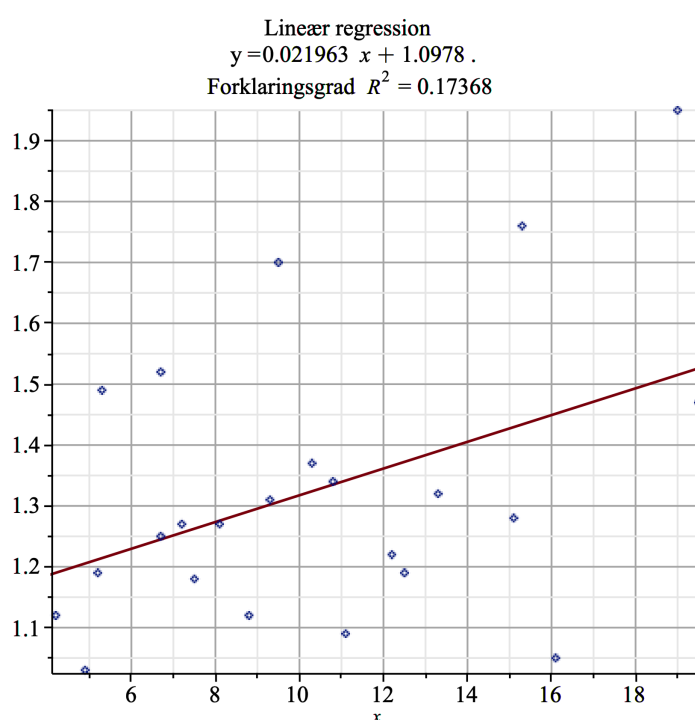
restart

with(Gym) :

$X := [15.3, 10.8, 8.1, 19.5, 7.2, 5.3, 9.3, 11.1, 7.5, 12.2, 6.7, 5.2, 19.0, 15.1, 6.7, 4.2, 10.3, 12.5, 16.1, 13.3, 4.9, 8.8, 9.5] :$

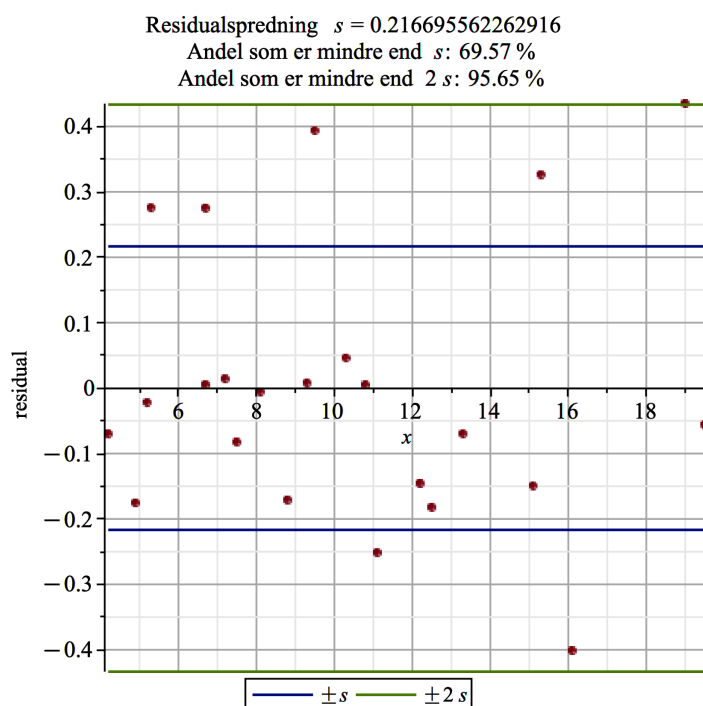
$Y := [1.76, 1.34, 1.27, 1.47, 1.27, 1.49, 1.31, 1.09, 1.18, 1.22, 1.25, 1.19, 1.95, 1.28, 1.52, 1.12, 1.37, 1.19, 1.05, 1.32, 1.03, 1.12, 1.70] :$

Vi starter med at udføre en lineær regression

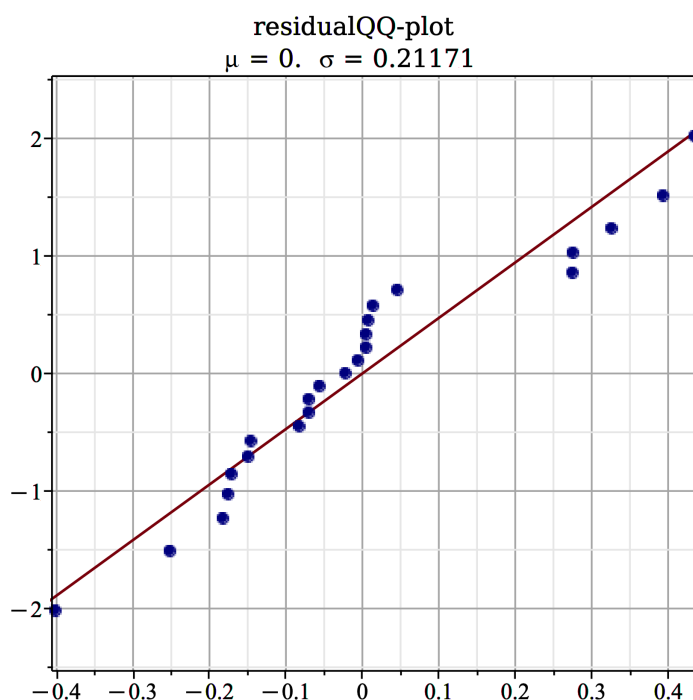


Læg mærke til den meget lave forklaringsgrad.

Lad os tjekke residualplottet og QQplottet:



Nok ser vi her ganske store variationer i residualerne, men ingen systematiske afvigelser.



Ikke alt for overbevisende. Hvis vi havde valgt en anden stikprøve på 23 blandt alle diabetikere, havde vi sikkert fået et andet resultat, måske endda et bedre resultat. De estimer, vi finder for den sande hældning og den sande skæring, er afhængige af den aktuelle stikprøve.

Vi kan, på baggrund af stikprøven, teste hypoteser om, hvorvidt hældningen a og/eller skæringen b antager specifikke værdier.

I det konkrete eksempel er a lille og faktisk ret tæt på 0, så det vil her være på sin plads at undersøge, om $a = 0$, altså om der overhovedet er nogen sammenhæng mellem blodsukkerniveauet og vfc:

Vi vil altså teste hypotesen

$H_0 : a = 0$ (der er ingen sammenhæng mellem blodsukkerniveauet og vfc)

mod alternativet

$H_a : a \neq 0$ (der er en sammenhæng mellem blodsukkerniveauet og vfc)

Dette klarer vi med kommandoen *testLin* fra Gym-pakken, der i sin grundform tester de to hypoteser $a = 0$ og $b = 0$:

testLin(*X*, *Y*)

	a	b
Koefficient	0.02196	1.09781
Standardfejl	0.01045	0.11748
t-stat	2.10096	9.34460
p-værdi	0.04790	0.00000
Nedre 95.00%	0.00022	0.85350
Øvre 95.00%	0.04370	1.34213
Frihedsgrader	21	

Tabellen viser koefficienterne i bedste rette linje – altså de samme som dem, vi fik, ved lineær regression.

p-værdi angiver, at hvis H_0 er sand, så er sandsynligheden ca. 4.8% for at få en stikprøve, der er lige så skæv eller skævere, end den aktuelle stikprøve. Hvis testen udføres på signifikansniveau 5%, må vi lige akkurat forkaste hypotesen H_0 .

Nedre 95% og *Øvre 95%* er grænserne i 95%-konfidensintervallet for a :

[0.00022, 0.04370]

som fortæller, at på baggrund af vores stikprøve, kan vi være 95% sikre på, at hvis vi gentager eksperimentet rigtig mange gange, så vil a ligge i intervallet i 95% af gangene.

Tilsvarende fortæller b-kolonnen, at hvis hypotesen $b = 0$ er sand, så er sandsynligheden 0% for at få en stikprøve, der er lige så skæv eller skævere, end den aktuelle stikprøve. Vi må altså forkaste hypotesen $b = 0$ på signifikansniveau 5%.

Skal vi teste hypotesen

$H_0 : a = 0.03$

er syntaksen denne

testLin(*X*, *Y*, $a = 0.03$)

	a
Koefficient	0.02196
Standardfejl	0.01045
t-stat	-0.76887
p-værdi	0.45053
Nedre 95.00%	0.00022
Øvre 95.00%	0.04370
Frihedsgrader	21

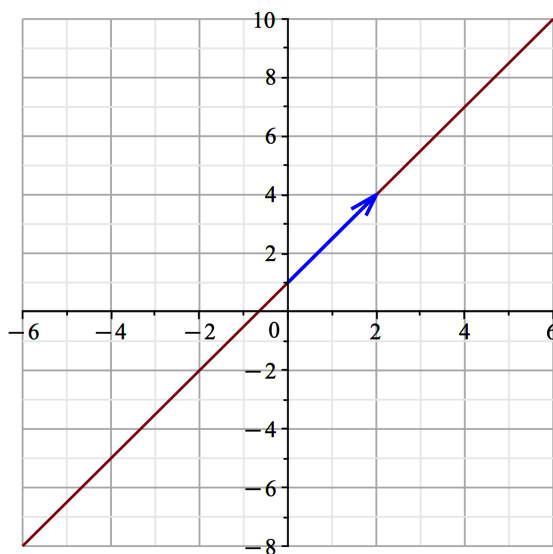
Det eneste, der er ændret i output er t-stat og p-værdien, der her er ca. 45%, så vi kan ikke forkaste H_0 på det foreliggende grundlag, hvilket vi udmærket viste, da 0.03 jo ligger i 95%-konfidensintervallet vi fandt ovenfor.

9 Vektorfunktioner

9.1 Parameterfremstilling for en ret linje

I Maple er det mest bekvemt at beskrive en parameterfremstilling for en ret linje som en funktion $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dvs. som en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt talpar – altså en vektor.

En parameterfremstilling er fastlagt ud fra et ankerpunkt P_0 og en retningsvektor $\vec{r}$.



En parameterfremstilling for linjen ovenfor er
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

I Maple defineres denne parameterfremstilling ved:

$$l(t) := \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 2, 3 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 0, 1 \rangle + t \cdot \langle 2, 3 \rangle \quad (9.1)$$

Beregn $l(t)$, og du får dette output:

$$l(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 + 3t \end{bmatrix}$$

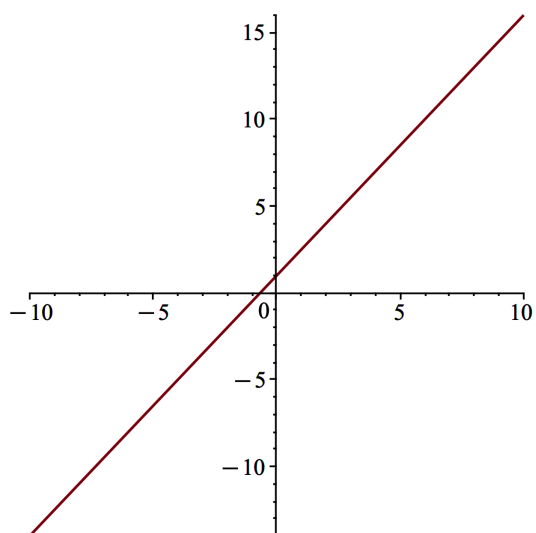
Parameterværdier beregner du således, fx:

$$l(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Linjen tegnes nemt med vektorplot fra Gym-pakken:

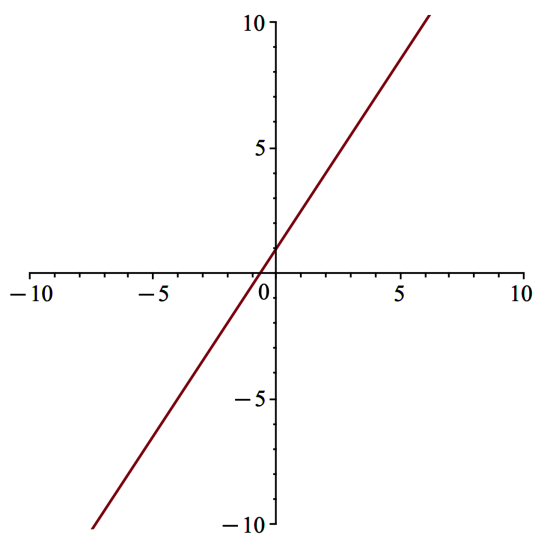
with(Gym) :

vektorPlot(l(t))



Som standard tegnes et vektorplot for parameteren t i intervallet $t = -10 \dots 10$. Det vindue, der plottes i, kan indstilles således:

vektorPlot(l(t), view = [-10 ..10, -10 ..10])



9.2 Skæring mellem to linjer givet ved parameterfremstillinger

To rette linjer er givet ved parameterfremstillingerne

$$l(t) := \langle 5, -2 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 5, -2 \rangle + t \cdot \langle 1, 2 \rangle \quad (9.2)$$

$$m(t) := \langle 3, 1 \rangle + t \cdot \langle -2, 4 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 3, 1 \rangle + t \cdot \langle -2, 4 \rangle \quad (9.3)$$

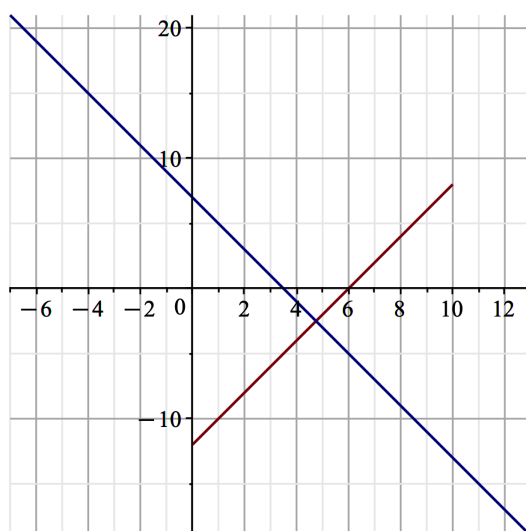
For god ordens skyld skal vi lige checke, om de to linjer skærer hinanden:

with(Gym) :

$$\det(\langle 1, 2 \rangle, \langle -2, 4 \rangle) = 8$$

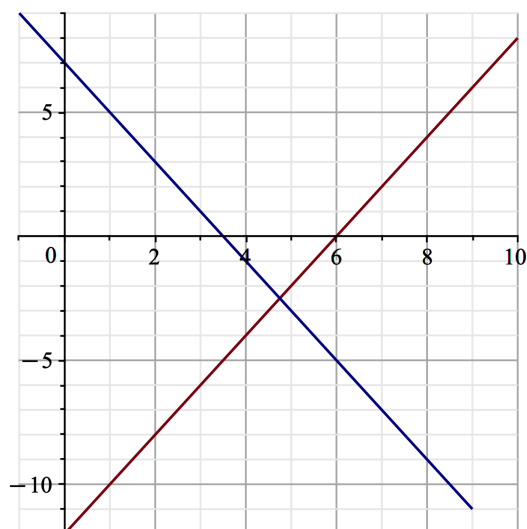
Da determinaten er forskellig fra 0, er de to retningsvektorer ikke parallelle, og de to linjer må derfor have et skæringspunkt.

`vektorPlot([ [l(t), color = "Burgundy" ], [m(t), color = "Navy" ]], gridlines )`



For at få en pænere graf, begrænses t -intervallet en smule for m :

`vektorPlot([ [l(t), color = "Burgundy" ], [m(t), t = -3 .. 2, color = "Navy" ]], gridlines )`



I stedet skal du parametrisere med to forskellige tidsparetre s og t , og løse ligningen $l(t) = m(s)$

$$\begin{bmatrix} 5 + t \\ -2 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2s \\ 1 + 4s \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Der er et system bestående af to ligninger med to ubekendte

$$\begin{cases} 5 + t = 3 - 2s \\ -2 + 2t = 1 + 4s \end{cases}$$

Dette kan løses direkte i Maple med

`solve({5 + t = 3 - 2s, -2 + 2t = 1 + 4s}, {s, t})`

$$\left\{ s = -\frac{7}{8}, t = -\frac{1}{4} \right\} \quad (9.5)$$

– eller ved at benytte navnene for de to parameterfremstillinger:

`solve(l(t) = m(s), {s, t})`

$$\left\{ s = -\frac{7}{8}, t = -\frac{1}{4} \right\} \quad (9.6)$$

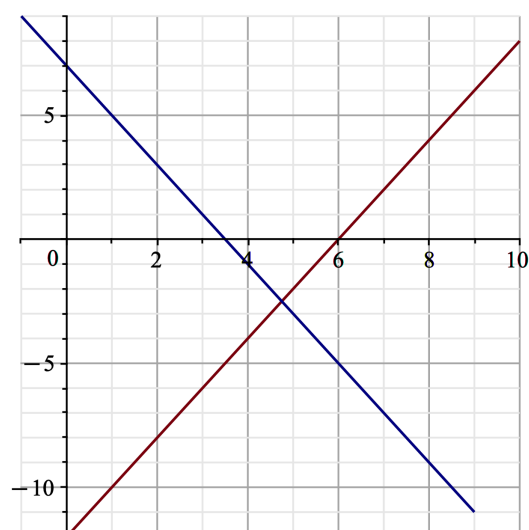
Skæringspunktet bestemmes da ved at indsætte $t = -\frac{1}{4}$ i $l(t)$ (eller $s = -\frac{7}{8}$ i $m(s)$):

$$l\left(-\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Skæringspunktet bliver dermed $\left(\frac{19}{4}, -\frac{5}{2}\right)$.

At vi bruger forskellige tidsparetre betyder intet for grafen:

`vektorPlot([l(t), color = "Burgundy"], [m(s), s = -3 .. 2, color = "Navy"], gridlines)`



9.3 Vektorfunktioner - mere generelt

En vektorfunktion $\vec{r}$ er en funktion, der til et reelt tal knytter et reelt talpar – altså en vektor. En vektorfunktionen vil ofte være defineret i et interval I , og vil således være en funktion $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Et eksempel på en vektorfunktion er

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Udregner vi funktionsværdien for et par t -værdier, fx $t=0$ og $t=1$, finder vi

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} 0^2 - 2 \\ 0^2 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(1) = \begin{bmatrix} 1^2 - 2 \\ 1^2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Når vi skal tegne grafen for vektorfunktionen, vil vi ikke afsætte de vektorer, vi får som funktionsværdier, men opfatte disse som stedvektorer for punkterne hhv. $(-2, 0)$ og $(-1, 3)$.

Vi skal have Maple til at gøre arbejdet for os, så vi skal have defineret vektorfunktionen i Maple. Det gør vi nemmest sådan her:

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle \quad (9.7)$$

– hvor $\langle \rangle$ indsættes som ulighedstegnene $<$ og $>$, der findes på tastaturet.

Herefter kan vi bruge funktionen til at udregne værdier

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

For at få en ide om grafens forløb udregner vi en række støtteværdier. Det kan nemt klares ved at skrive de t -værdier, vi vil benytte, i en liste og få funktionsværdien udregnet på alle disse på én gang ved at skrive

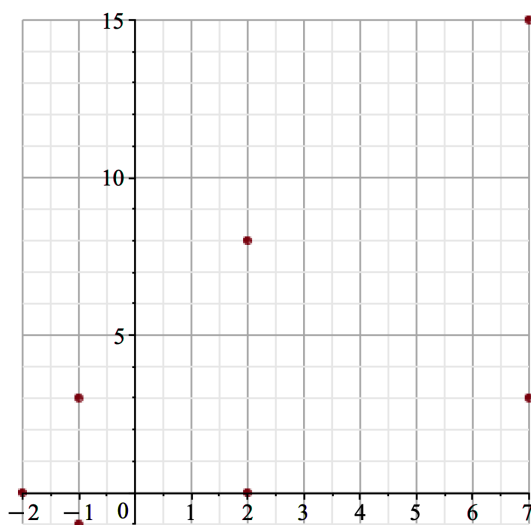
$$P := \vec{r} \sim ([-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3])$$

$$P := \left[\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix} \right] \quad (9.8)$$

Disse punkter plottes med kommandoen *punktPlot* (fra Gym-pakken):

with(Gym) :

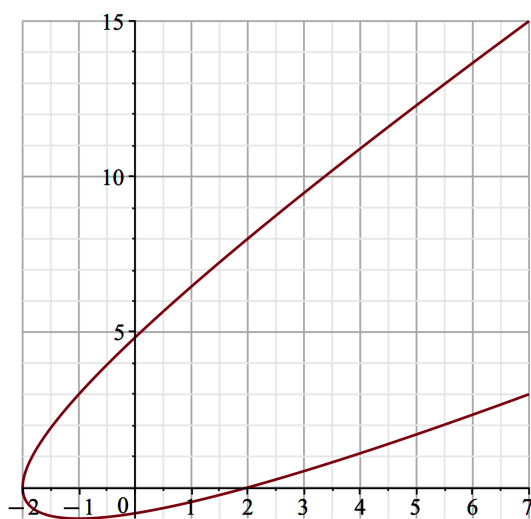
`punktPlot(P)`



Allerede her kan vi få en fornemmelse af forløbet: Vi starter i punktet $(7, 3)$ til $t = -3$. Til $t = -2$ befinder vi os i punktet $(2, 0)$, til $t = -1$ i punktet $(-1, -1)$, osv.

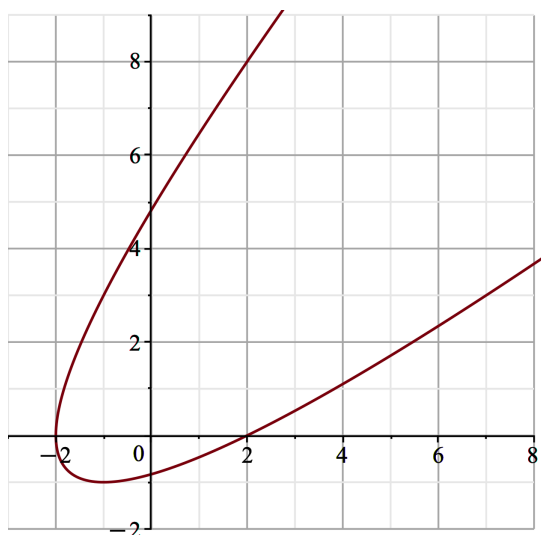
Kommandoen `vektorPlot` klarer alt dette i én arbejdsgang:

`vektorPlot( $\vec{r}(t)$ ,  $t = -3 \dots 3$ , gridlines)`



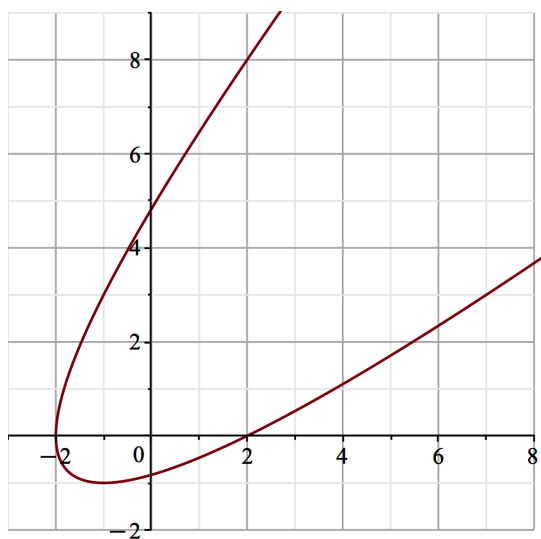
Her er grafen tegnet i et automatisk vindue. Vi kan få en pænere graf ved at indstille vinduet manuelt, men start altid med det automatiske (t -intervallet ændres også en smule for at få det valgte vindue fyldt helt ud):

`vektorPlot( $\vec{r}(t)$ ,  $t=-4 \dots 3$ ,  $view = [-3 \dots 8, -2 \dots 9]$ ,  $gridlines$ ,  $size = [300, 300]$ )`



Oftentimes it is not necessary to worry about the t -interval, which is standard $t = -5 \dots 5$. We would get exactly the same graph by just using the standard:

`vektorPlot( $\vec{r}(t)$ ,  $view = [-3 \dots 8, -2 \dots 9]$ ,  $gridlines$ )`



9.4 Skæring med akserne

Skal du mere og andet end blot at tegne grafen for en vektorfunktion, er det en god ide at definere de to koordinatfunktioner først og derefter definere vektorfunktionen:

Vi skal definere

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

Hertil defineres først koordinatfunktionerne

$$x(t) := t^2 - 2$$

$$x := t \mapsto t^2 - 2 \quad (9.9)$$

$$y(t) := t^2 + 2t$$

$$y := t \mapsto t^2 + 2 \cdot t \quad (9.10)$$

og så defineres vektorfunktionen vha. de to koordinatfunktioner

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle x(t), y(t) \rangle \quad (9.11)$$

Skæringspunkterne med akserne kan så bestemmes:

Skæring med x-aksen:

$$y(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -2\}, \{t = 0\}$$

Dette giver os de tidspunkter, hvor skæringen sker. For at finde skæringspunkterne udregnes funktionsværdierne

$$\vec{r}(-2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skæringspunkterne med x-aksen er således $(2, 0)$ og $(-2, 0)$.

Skæring med y-aksen:

$$x(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = \sqrt{2}\}, \{t = -\sqrt{2}\}$$

Dette giver os de tidspunkter, hvor skæringen sker. For at finde skæringspunkterne udregnes funktionsværdierne

$$\vec{r}(-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{afrund}} \begin{bmatrix} 0. \\ -0.83 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{afrund}} \begin{bmatrix} 0. \\ 4.83 \end{bmatrix}$$

Skæringspunkterne med y-aksen er således $(0, 2 - 2\sqrt{2})$ og $(0, 2 + 2\sqrt{2})$.

Eksempel 1

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 + 1 \\ 4t - 2t^2 \end{bmatrix}$$

Bestem skæringspunkterne med koordinataksene.

Vi gør som ovenfor og definerer:

$$x(t) := t^3 + 1 :$$

$$y(t) := 4t - 2t^2 :$$

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle x(t), y(t) \rangle \quad (9.12)$$

Skæring med x-aksen:

$$y(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t=0\}, \{t=2\}$$

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}(2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skæringspunkterne med x-aksen er således $(1, 0)$ og $(9, 0)$.

Skæring med y-aksen:

$$x(t) = 0 \xrightarrow{\text{reelSolve}} -1 - 1$$

Her er reelSolve fra Gym-pakken valgt for at undgå komplekse løsninger.

$$\vec{r}(-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Skæringspunkterne med y-aksen er således $(0, -6)$

9.5 Eliminering af parameteren

Fra tid til anden kan man eliminere parameteren i en vektorfunktion og bestemme en ligning for en kurve, som vektorfunktionens graf (banekurven) er en del af.

Lad os som et eksempel herpå se på vektorfunktionen (her skrevet som en parameterfremstilling, da denne form er mest bekvem at arbejde med her):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 1 \\ t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Parameterfremstillingen giver os de to ligninger

$$x = t - 1$$

$$y = t^2 + 1$$

I den øverste ligning isoleres t :

$$x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1$$

Dette udtryk for t indsættes i den nederste ligning

$$y = (x + 1)^2 + 1 \stackrel{\text{simply}}{=} y = x^2 + 2x + 2$$

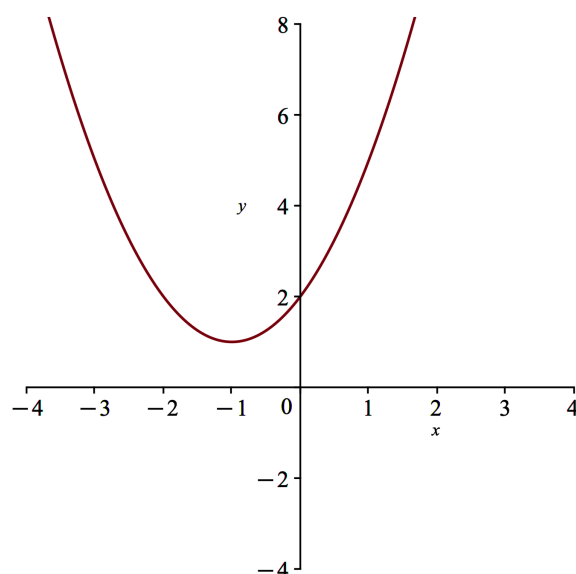
Heraf ser vi at banekurven er en del af (her det hele) af parablen med ligningen $y = x^2 + 2x + 2$.

Dette arbejde kan vi få Maple til at udføre

$$\text{eliminate}(\{x = t - 1, y = t^2 + 1\}, t) \quad [\{t = x + 1\}, \{x^2 + 2x - y + 2\}] \quad (9.13)$$

hvor der i den sidste parentes er underforstået, at $x^2 + 2x - y + 2 = 0$. Ved at isolere y i dette udtryk har vi $y = x^2 + 2x + 2$, som før.

Lad os tegne kurven. Det er meget nemt, da den er givet ved en ligning, idet ligningen blot skal trækkes til et 2D-plot (vælg: Insert > Plot > 2-D):



Eksempel 1

Her bytter vi om på de to koordinatfunktioner

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 + 1 \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

Vi prøver at eliminere parameteren

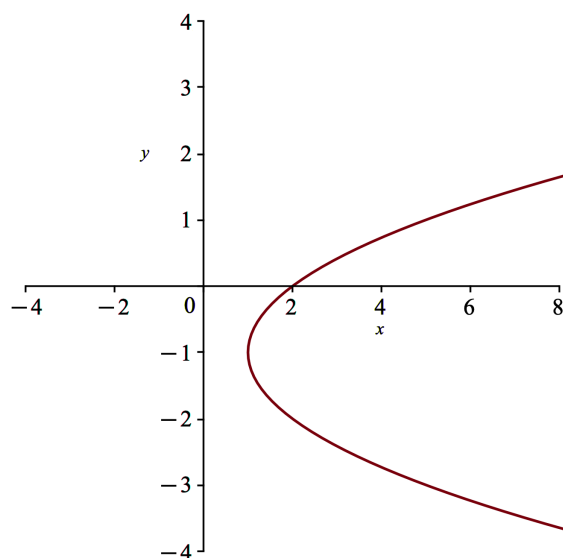
$$\text{eliminate}(\{x = t^2 + 1, y = t - 1\}, t)$$

$$[\{t = y + 1\}, \{y^2 - x + 2y + 2\}] \quad (9.14)$$

$$y^2 - x + 2y + 2 = 0$$

$$y^2 - x + 2y + 2 = 0 \quad (9.15)$$

Lad os tegne kurven. Det er meget nemt, da den er givet ved en ligning, idet ligningen blot skal trækkes til et 2D-plot (vælg: Insert > Plot > 2-D plot):



Her bliver kurven også en parabel, men ikke en parabel i sædvanlig forstand, der jo har grenene opad eller nedad. Parablen, der er tegnet her, er faktisk parablen fra eksemplet ovenfor spejlet i linjen med ligningen $y = x$.

9.6 Differentiation af en vektorfunktion

Hvis de to koordinatfunktioner $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i et åbent interval I , er vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

differentiabel med afledet

$$\vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

Oftest betegnes den afledte funktion $\vec{v}(t)$.

Vi ser igen på vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle :$$

Den afledte kan bestemmes ved blot at skrive:

$$\vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t + 2 \end{bmatrix}$$

og du kan udregne værdier, fx

$$\vec{r}'(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Oftest er det dog en god ide at definere de to koordinatfunktioner først

$$x(t) := t^2 - 2 :$$

$$y(t) := t^2 + 2t :$$

og så definere vektorfunktionen ved

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle :$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t + 2 \end{bmatrix}$$

9.7 Tangent til banekurven

Tangent til banekurven

Det, vi for det meste skal bruge den afledte af en vektorfunktion til, er til at finde tangenter til banekurven. Der gælder nemlig:

Hvis $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, så er $\vec{r}'(t_0)$ en retningsvektor for tangenten til banekurven i punktet $(x(t_0), y(t_0))$.

Eksempel 1

Vi skal bestemme en parameterfremstilling for tangenten til banekurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

i punktet svarende til parameterværdien $t = 1$.

Vi definerer først funktionen

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle :$$

Punktet, vi skal bruge, er

$$\vec{r}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren for tangenten i dette punkt er

$$\vec{r}'(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Herefter kan vi opskrive parameterfremstillingen

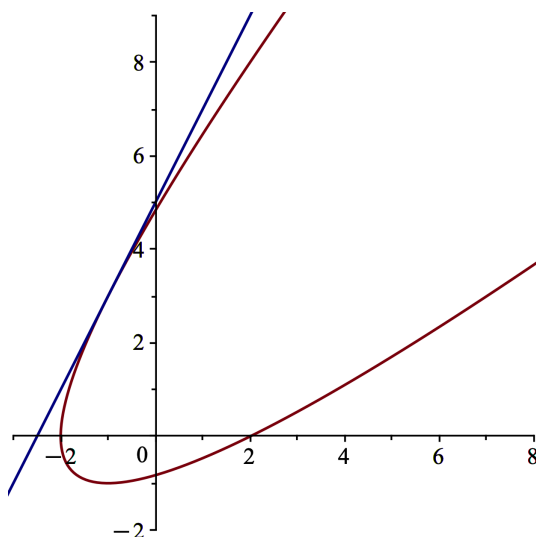
$$l(t) := \langle -1, 3 \rangle + t \cdot \langle 2, 4 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle -1, 3 \rangle + t \cdot \langle 2, 4 \rangle \tag{9.16}$$

Vi skal have lavet et plot for at se, om vi har regnet rigtigt:

with(Gym) :

vektorPlot(*[[* $\vec{r}(t)$ *], [* $l(t)$ *, color = "Navy"]], view = [-3 ..8, -2 ..9]*



Eksempel 2 (med brug af tangent-kommandoen i Gym-pakken)

Vi ser på det samme eksempel som i Eksempel 1:

Vi skal bestemme en parameterfremstilling for tangenten til banekurven for

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

i punktet svarende til parameterværdien $t = 1$.

Vi starter med at definere vektorfunktionen:

with(Gym) :

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle :$$

Vi indsætter i tangent-kommandoen:

$$\text{tangent}(\vec{r}(t), t = 1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2t \\ 3 + 4t \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

Her får vi ikke direkte tangenten udtrykt som en funktion, så det må vi selv gøre (ved copy&paste – eller selv skrive det):

$$l(t) := \langle -1 + 2t, 3 + 4t \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle -1 + 2 \cdot t, 3 + 4 \cdot t \rangle \quad (9.18)$$

Plottet laves præcis som beskrevet i Eksempel 1

Eksempel 3 (tegning af flere tangenter)

Eksemplet, vi skal bruge, er det samme som ovenfor

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 2, t^2 + 2t \rangle :$$

Vi skal tegne tangenterne hørende til parameterværdierne $t = 1$ og $t = -2$. Tangenterne bestemmes som beskrevet ovenfor:

$$\vec{r}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$l(t) := \langle -1, 3 \rangle + t \cdot \langle 2, 4 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle -1, 3 \rangle + t \cdot \langle 2, 4 \rangle \quad (9.19)$$

$$\vec{r}(-2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'(-2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$m(t) := \langle 2, 0 \rangle + t \cdot \langle -4, -2 \rangle$$

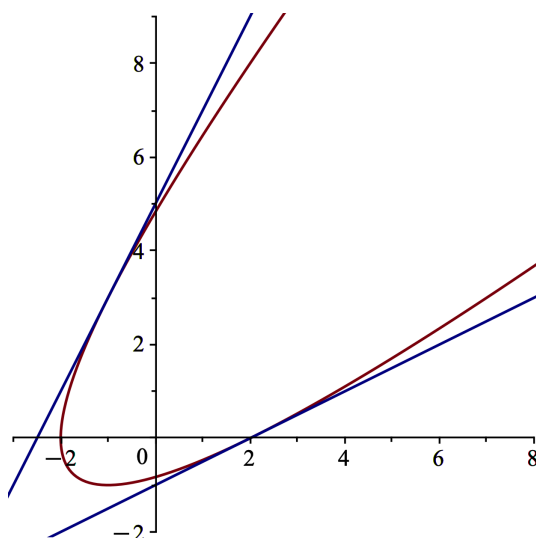
$$m := t \mapsto \langle 2, 0 \rangle + t \cdot \langle -4, -2 \rangle \quad (9.20)$$

Her skal vi være meget opmærksomme på, at når der tegnes flere vektorfunktioner i samme plot, så skal vektorfunktionerne skrives som en liste af lister:

$$[[\vec{r}(t)], [l(t)], [m(t)]]$$

og det skyldes, at det skal være muligt at føje forskellige egenskaber til de enkelte plots – fx som her: *color*, men i andre sammenhænge også det t -interval, der skal benyttes.

Plot-kommandoen til at se sådan ud, hvor vi har en liste bestående af 3 lister:



9.8 Vandrette og lodrette tangenter

Vi arbejder videre med vektorfunktionen

$$x(t) := t^2 - 2 :$$

$$y(t) := t^2 + 2t :$$

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle :$$

For at kunne se udtrykket på vektorform beregnes $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2 \\ t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

Vandrette tangenter

For at finde de steder, hvor banekurven har vandret tangent, løses ligningen

$$y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = -1\}$$

Så til

$t = -1$ er der vandret tangent. Tangenteringen sker i punktet med stedvektoren

$$\vec{r}(-1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren for tangenten er

$$\vec{r}'(-1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En parameterfremstilling for denne vandrette tangent er

$$l(t) := \langle -1, -1 \rangle + t \cdot \langle -2, 0 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle -1, -1 \rangle + t \cdot \langle -2, 0 \rangle \quad (9.21)$$

Lodrette tangenter

For at finde de steder, hvor banekurven har lodret tangent, løses ligningen

$$x'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0\}$$

Så til

$t = 0$ er der lodret tangent. Tangenteringen sker i punktet med stedvektoren

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren for tangenten er

$$\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

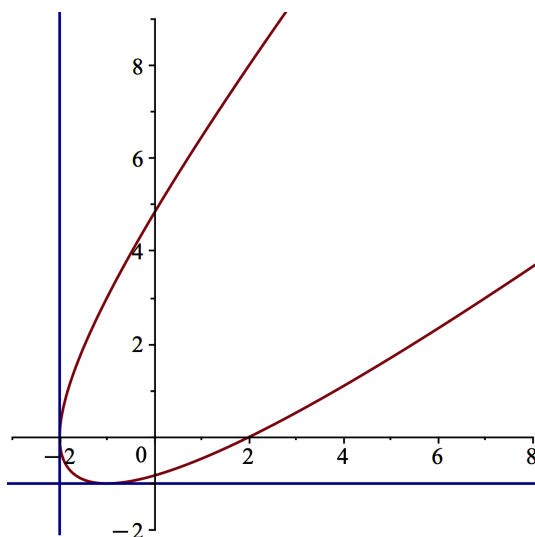
En parameterfremstilling for denne vandrette tangent er

$$\mathbf{m}(t) := \langle -2, 0 \rangle + t \cdot \langle 0, 2 \rangle$$

$$\mathbf{m} := t \mapsto \langle -2, 0 \rangle + t \cdot \langle 0, 2 \rangle \quad (9.22)$$

Lad os tegne den vandrette og den lodrette tangent ind sammen med banehurven

with(Gym) :



Her kunne vi naturligvis også have benyttet tangent-kommandoen fra Gym-pakken til at bestemme de to tangenter:

$$\text{tangent}(\vec{r}(t), t = -1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2t \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

$$\text{tangent}(\vec{r}(t), t = 0)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2t \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

Eksempel 1

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 + 1 \\ 4t - 2t^2 \end{bmatrix}$$

Bestem lodrette og vandrette tangenter

Vi gør som ovenfor og definerer:

$$x(t) := t^3 + 1 :$$

$$y(t) := 4t - 2t^2 :$$

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle :$$

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 + 1 \\ -2t^2 + 4t \end{bmatrix}$$

Vandrette tangenter

For at finde de steder, hvor banekurven har vandret tangent, løses ligningen

$$y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1\}$$

Så til

$t = 1$ er der vandret tangent. Tangeringen sker i punktet med stedvektoren

$$\vec{r}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren for tangenten er

$$\vec{r}'(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En parameterfremstilling for denne vandrette tangent er

$$l(t) := \langle 2, 2 \rangle + t \cdot \langle 3, 0 \rangle$$

$$l := t \mapsto \langle 2, 2 \rangle + t \cdot \langle 3, 0 \rangle \quad (9.25)$$

Lodrette tangenter

For at finde de steder, hvor banekurven har lodret tangent, løses ligningen

$$x'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0\}, \{t = 0\}$$

Så til

$t = 0$ er der lodret tangent. Tangeringen sker i punktet med stedvektoren

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren for tangenten er

$$\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

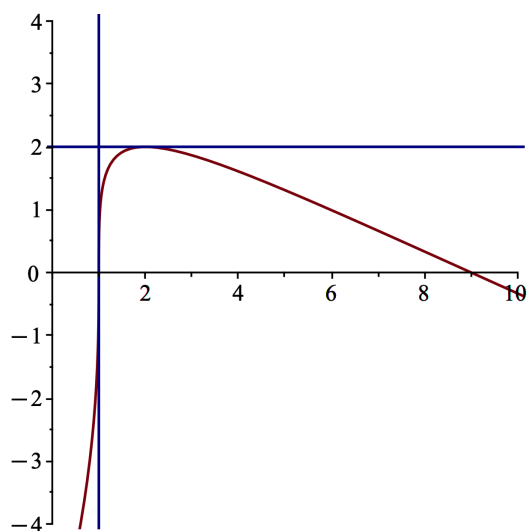
En parameterfremstilling for denne lodrette tangent er

$$m(t) := \langle 1, 0 \rangle + t \cdot \langle 0, 4 \rangle$$

$$m := t \mapsto \langle 1, 0 \rangle + t \cdot \langle 0, 4 \rangle \quad (9.26)$$

Vi plotter for at se, om vi har regnet rigtigt

```
vektorPlot([[\vec{r}(t)], [l(t), color = "Navy"], [m(t), color = "Navy"]], view = [0 ..10, -4 ..4])
```



Og det ser jo rigtig fornuftigt ud!

9.9 Dobbelpunkter

Et punkt, som banekurven for en vektorfunktion passerer to gange, kaldes et *dobbelpunkt*.

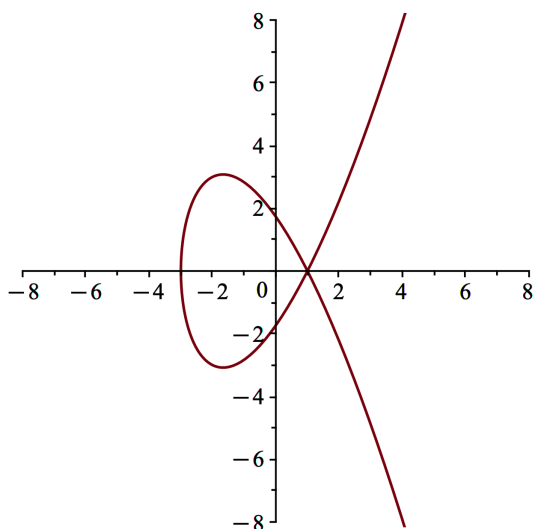
Et eksempel på en vektorfunktion med et dobbelpunkt er

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle \quad (9.27)$$

`with(Gym) :`

```
vektorPlot(\vec{r}(t), view = [-8 ..8, -8 ..8])
```



Her kan vi nemt aflæse, at der er et dobbelpunkt i $(1, 0)$.

Parameterværdierne kan vi bestemme ved at løse ligningen

$$\vec{r}(t) = \langle 1, 0 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Dette giver os to ligninger med én ubekendt. Vi sætter Maple til at løse (selvom det er ganske nemt med håndkraft):

$$\begin{aligned} & \text{solve}(\{t^2 - 3 = 1, t^3 - 4t = 0\}) \\ & \{t = 2\}, \{t = -2\} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Men hvad nu, hvis vi ikke kunne aflæse dobbelpunktet? Ja, så må vi jo regne os frem til det. Her et tricket at se på ligningen

$$\begin{aligned} & \vec{r}(t) = \vec{r}(s) \\ & \begin{bmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 - 3 \\ s^3 - 4s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.30)$$

hvor vi benytter to forskellige parametre t og s . Vi løser ligningssystemet bestående af to ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} & \text{solve}(\{t^2 - 3 = s^2 - 3, t^3 - 4t = s^3 - 4s, s < t\}) \\ & \{s = -2, t = 2\} \end{aligned} \quad (9.31)$$

hvor $s < t$ er tilføjet for at undgå symmetriske løsninger.

TIP: Kommandoen *solve* kan løse vektorligningen direkte

$$\begin{aligned} & \text{solve}(\vec{r}(t) = \vec{r}(s)) \\ & \{s = t, t = t\}, \{s = -2, t = 2\}, \{s = 2, t = -2\} \end{aligned} \quad (9.32)$$

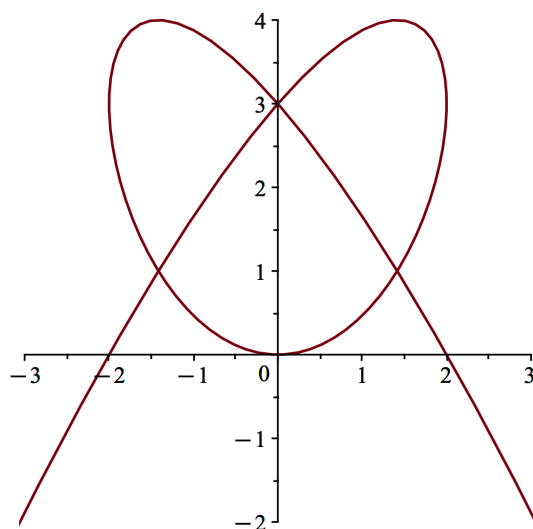
Eksempel 1

Så nemt som ovenfor går det sjældent. Lad os se på dette eksempel:

$$\begin{aligned} & \vec{r}(t) := \langle t^3 - 3t, 4t^2 - t^4 \rangle \\ & \vec{r} := t \mapsto \langle t^3 - 3 \cdot t, 4 \cdot t^2 - t^4 \rangle \end{aligned} \quad (9.33)$$

with(Gym) :

`vektorPlot( $\vec{r}(t)$ , view = [-3 ..3, -2 ..4])`



Her er 3 dobbeltpunkter, hvoraf vi blot kan aflæse koordinaterne til det ene.

Vi løser ligningen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s)$$

$$\begin{bmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^3 - 3s \\ -s^4 + 4s^2 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

Her er det fornuftigt at sætte nogle options på solve-kommandoen for at undgå et ret uforståeligt output

`solve({ $t^3 - 3t = s^3 - 3s$ ,  $-t^4 + 4t^2 = -s^4 + 4s^2$ ,  $t < s$ }, AllSolutions, explicit)`

$$\begin{aligned} & \left\{ s = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}, t = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \{s = \sqrt{3}, t = -\sqrt{3}\}, \left\{ s = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}, t = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \end{aligned} \quad (9.35)$$

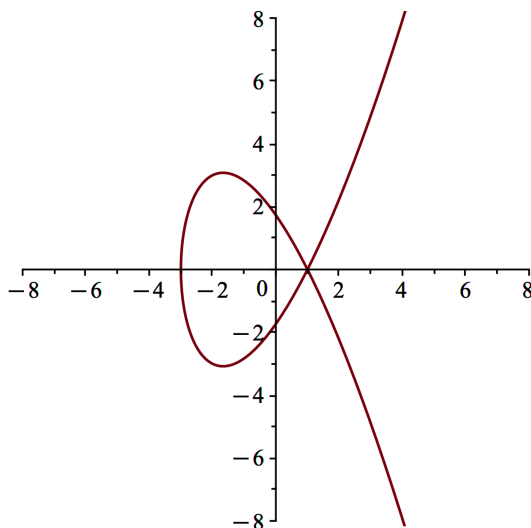
- og her har vi de eksakte parameterværdier. Punkterne beregnes ved at indsætte parameterværdierne i vektorfunktionen

9.10 Vinklen mellem to passager af et dobbelpunkt

Vi ser igen på vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle :$$

`vektorPlot( $\vec{r}(t)$ , view = [-3 ..3, -2 ..4])`



Dobbelpunktet passeres til parameterværdierne $t = -2$ og $t = 2$ (som udregnet ovenfor)

Vi skal have fundet vinklen mellem de to retningsvektorer, der er

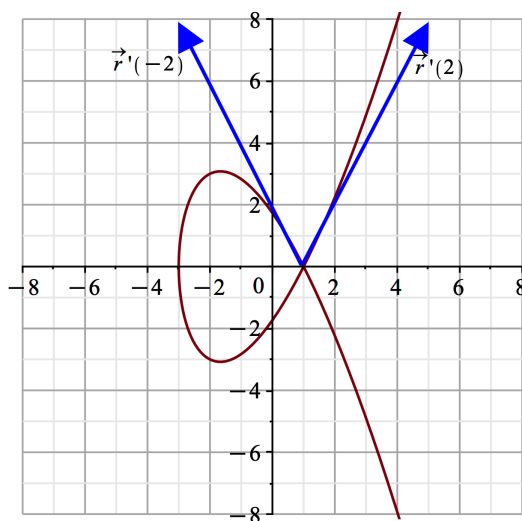
$$\vec{r}'(-2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vinklen bestemmes således

$$\text{vinkel}(\langle -4, 8 \rangle, \langle 4, 8 \rangle) = 53.13010235$$

Lad os tegne de to vektorer ind (med Maple's tegneværktøj):



9.11 Parameterfremstilling for en cirkel

Hvis banekurven for en vektorfunktion fremstiller en cirkel, benyttes oftest betegnelsen 'parameterfremstilling' for denne vektorfunktion – præcist som betegnelsen 'parameterfremstilling' benyttes, hvis banekurven er en ret linje.

Banekurven for parameterfremstillingen

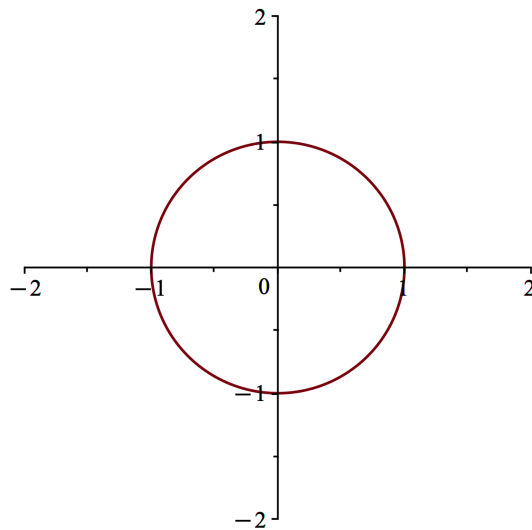
$$\vec{p}(t) := \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$$

$$\vec{p} := t \mapsto \langle \cos(t), \sin(t) \rangle \quad (9.36)$$

er en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius 1 – altså enhedscirklen. Hvis vi lader parameteren t gennemløbe alle reelle tal, vil banekurven gennemløbes uendeligt mange gange. Nøjes vi med $t \in [0, 2\pi]$, vil banekurven gennemløbes netop én gang.

with(Gym) :

$$\text{vektorPlot}(\vec{p}(t), t = 0 .. 2\pi, \text{view} = [-2 .. 2, -2 .. 2])$$



Starten sker i $(1, 0)$:

$$\vec{p}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Til $t = \frac{\pi}{2}$ er vi i punktet $(0, 1)$:

$$\vec{p}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bevægelsen sker altså i positiv omløb (mod uret).

Hvis vi vil have en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius r , er parameterfremstillingen

$$\vec{p}(t) := r \cdot \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$$

Og, hvis vi vil have centrum placeret et andet sted end i $(0, 0)$, så forskyder vi med vektoren $\langle c_1, c_2 \rangle$, så parameterfremstillingen for en cirkel med centrum i (c_1, c_2) og radius r er:

$$\vec{p}(t) := \langle c_1, c_2 \rangle + r \cdot \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$$

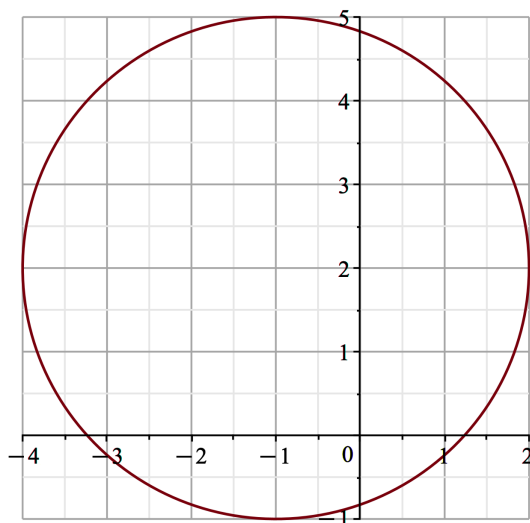
Eksempel 1

Cirklen med centrum i $(-1, 2)$ og med radius 3 har parameterfremstillingen

$$\vec{p}(t) := \langle -1, 2 \rangle + 3 \cdot \langle \cos(t), \sin(t) \rangle :$$

with (Gym) :

$$\text{vektorPlot}(\vec{p}(t), t = 0 .. 2 \pi, \text{size} = [300, 300])$$



Cirkelbevægelsen kan speedes op ved at gange en konstant ω på t :

$$\vec{p}(t) := \langle c_1, c_2 \rangle + r \cdot \langle \cos(\omega \cdot t), \sin(\omega \cdot t) \rangle$$

Hvis $\omega = 1$ og vi regner i sekunder, vil cirklen gennemløbes på 2π sekunder. Er $\omega = 2$, vil vil cirklen gennemløbes på π sekunder. Generelt gælder, at omløbstiden T er

$$T = \frac{2 \pi}{\omega}$$

Eksempel 2

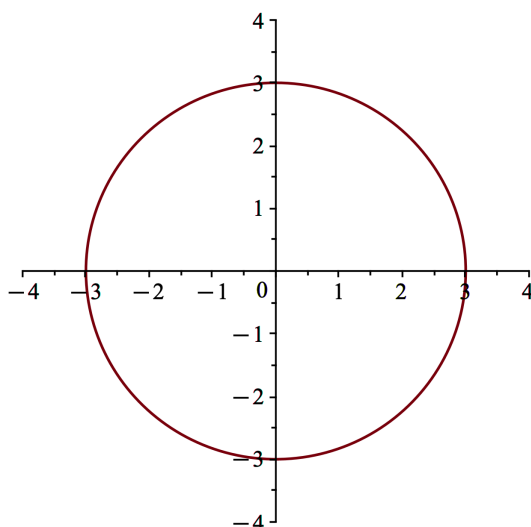
En cirkelbevægelse med centrum i $(0, 0)$ skal starte i punktet $(0, 3)$ og gennemløbe cirklen én gang i løbet af 1 sekund.

Parameterfremstillingen for denne cirkelbevægelse er

$$\vec{p}(t) := 3 \cdot \left\langle \cos\left(2 \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2 \pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle$$

$$\vec{p} := t \mapsto 3 \cdot \left\langle \cos\left(2 \cdot t \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \pi\right), \sin\left(2 \cdot t \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \right\rangle \quad (9.37)$$

`vektorPlot( $\vec{p}(t)$ ,  $t=0..1$ ,  $view=[-4..4, -4..4]$ )`



At bevægelsen starter i $(0, 3)$ følger af, at

$$\vec{p}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Og at t -intervallet er $[0, 1]$ følger af, at omløbstiden er $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

9.12 Hastighed og acceleration

Grafen for en vektorfunktion kan benyttes til at beskrive banekurven for en partikelbevægelse – eller for den sags skyld en bold, der kastes.

I denne kontekst beskriver

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$$

partiklens position til tiden t .

Den afledte funktion

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t) \rangle$$

beskriver partiklens hastighed til tiden t . Denne vektor kaldes *hastighedsvektoren*. Hastighedsvektoren er således retningsvektor for tangenten til banekurven i punktet med koordinaterne $(x(t), y(t))$.

Ved partiklens *fart* til tidspunktet t forstås længden af hastighedsvektoren.

Endelig er partiklens acceleration til tiden t bestemt ved

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \langle x''(t), y''(t) \rangle$$

Eksempel 1

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 - 4 \end{bmatrix}, \quad -2.25 \leq t \leq 2.25$$

Kurven har et dobbelt punkt Q , der passerer til to forskellige værdier af t .

a) Bestem gradtallet for vinklen mellem hastighedsvektorerne svarende til de to værdier af t .

b) Bestem det tidspunkt, hvor hastighedsvektoren er ensrettet med vektoren $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

c) Gør rede for, at til tidspunktet $t = 0$ er hastighedsvektoren og accelerationsvektoren ortogonale.

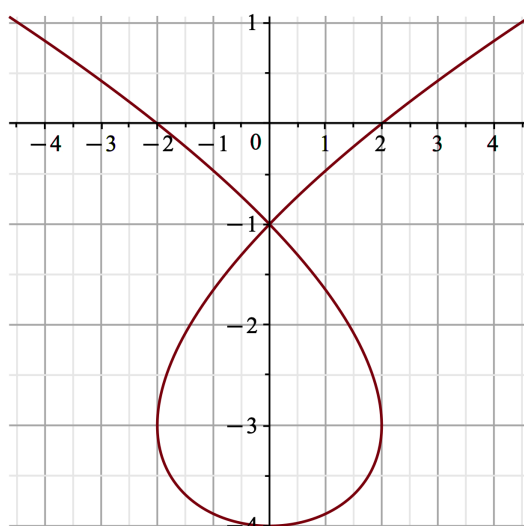
Løsning:

Først plotter vi vektorfunktionen – og her skal vi huske at tage definitionsintervallet med i *vektorPlot* kommandoen:

$$\vec{r}(t) := \langle t^3 - 3t, t^2 - 4 \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle t^3 - 3t, t^2 - 4 \rangle \quad (9.38)$$

$$\text{vektorPlot}(\vec{r}(t), t = -2.25 .. 2.25, \text{size} = [300, 300])$$



For at bestemme de to parameterværdier, hvor vi befinder os i dobbelt punktet, løser vi ligningen

$$\vec{r}(t) = \langle 0, -1 \rangle$$

$$\begin{bmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

$$\text{solve}(\vec{r}(t) = \langle 0, -1 \rangle, \text{explicit})$$

$$\{t = \sqrt{3}\}, \{t = -\sqrt{3}\} \quad (9.40)$$

Uden *explicit* vil Maple returnere noget RootOf snask.

Vinklen mellem de to hastighedsvektorer kan nu bestemmes som

$$\text{vinkel}(\vec{r}'(-\sqrt{3}), \vec{r}'(\sqrt{3})) = 60.$$

Så vinklen mellem de to hastighedsvektorer er 60° .

Der er intet til hinder for at regne de to hastighedsvektorer ud først:

$$\vec{r}'(-\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'(\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

og derefter udregne

$$\text{vinkel}(\langle 6, -2\sqrt{3} \rangle, \langle 6, 2\sqrt{3} \rangle) = 60.$$

b)

For at bestemme det tidspunkt, hvor hastighedsvektoren er ensrettet med vektoren $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, sætter vi determinanten af de to vektorer lig med 0 – og løser den ligning, der kommer frem:

$$\det(\vec{r}'(t), \langle 5, 4 \rangle) = 0$$

$$12t^2 - 10t - 12 = 0 \quad (9.41)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\left\{ t = \frac{3}{2} \right\}, \left\{ t = -\frac{2}{3} \right\} \quad (9.42)$$

For disse t -værdier er hastighedsvektoren parallel med vektoren $\langle 5, 4 \rangle$. Vi udregner de to hastighedsvektorer

$$\vec{r}'\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Heraf ses, at for $t = \frac{3}{2}$ er hastighedsvektoren ensrettet med vektoren $\langle 5, 4 \rangle$. For $t = -\frac{2}{3}$ er de to vektorer modsat rettede.

c)

Til tidspunktet $t = 0$ er hastighedsvektoren og accelerationsvektoren hhv.

$$\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}''(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Det ses umiddelbart, at de to vektorer er ortogonale.

Hvis vektorerne ikke var så simple, ville vi være nødt til at tjekke, om skalarproduktet af de to vektorer er 0:

$$\langle -3, 0 \rangle \cdot \langle 0, 2 \rangle = 0$$

Hastighedsvektoren og accelerationsvektoren er også ortogonale for $t = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ og for $t = -\frac{1}{3}\sqrt{7}$. Prøv at tjekke dette

9.13 Areal af et område begrænset af en banekurve

Vi skal her igen se på vektorfunktionen

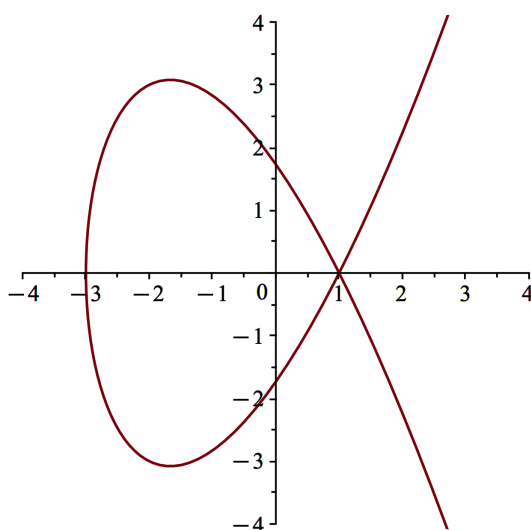
$$x(t) := t^2 - 3 :$$

$$y(t) := t^3 - 4t :$$

$$\vec{r}(t) := \langle x(t), y(t) \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle x(t), y(t) \rangle \quad (9.43)$$

$$\text{vektorPlot}(\vec{r}(t), \text{view} = [-4..4, -4..4])$$



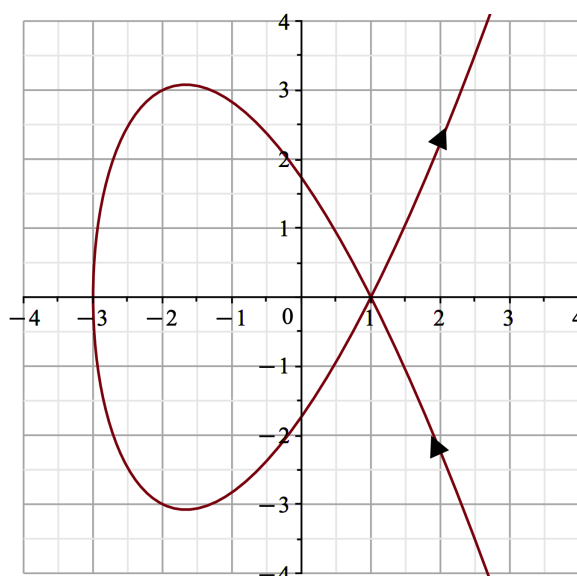
Vi skal bestemme arealet af det begrænsede område, der indeslutes af banekurven. Hertil er det meget vigtigt først at gøre sig klart, hvordan banekurven gennemløbes.

Fra tidligere ved vi, at dobbelpunktet passeres til tidspunkterne $t = -2$ og $t = 2$. Det er nemt at se, at til $t = 0$ befinder vi os i punktet $(-3, 0)$. Men hvilken vej kommer vi rundt i sløjfen?

Hertil kan vi fxudregne

$$\vec{r}'(-1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Heraf kan vi slutte, at kurven gennemløbes som vist med pilene:



Den sætning, vi skal bruge til at bestemme arealet, siger:

Arealet af et område begrænset af banekurven for en vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

x -aksen og de to lodrette linjer $x = x(t_1)$ og $x = x(t_2)$, kan bestemmes ved integralet

$$areal = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) \, dt$$

hvis y er en ikke negativ funktion og x er en voksende funktion i intervallet $[t_1, t_2]$.

Sætningen kan udvides til tilfældet, hvor x er en aftagende funktion: Der skal i dette tilfælde blot sættes et minus på integranden. Sætningen kan også udvides til tilfældet, hvor y er en negativ funktion. Her skal også sættes et minus på integranden.

For at bestemme arealet af den øverste (halvdel) af sløjfen, skal vi udregne integralet

$$-\int_{-2}^0 y(t) \cdot x'(t) \, dt = \frac{128}{15}$$

Funktionen y er positiv i intervallet $[-2, 0]$. Funktionen x er aftagende i intervallet $[-2, 0]$, så der skal sættes et minus på integranden.

For den nederste halvdel, skal vi udregne integralet

$$-\int_0^2 y(t) \cdot x'(t) \, dt = \frac{128}{15}$$

Funktionen y er negativ i intervallet $[-2, 0]$. Funktionen x er voksende i intervallet $[-2, 0]$, så der skal sættes et minus på integranden.

$$2 \cdot \frac{128}{15} = \frac{256}{15} \xrightarrow{\text{afrund}} 17.07$$

Alternativ metode:

Opgaven kan også løses ved at eliminere parameteren i vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle \quad (9.44)$$

Vi sætter Maple på opgaven:

$$\text{eliminate}(\{x = t^2 - 3, y = t^3 - 4t\}, t)$$

$$\left[\left\{ t = \frac{y}{x-1} \right\}, \{-x^3 - x^2 + y^2 + 5x - 3\} \right] \quad (9.45)$$

Herefter skal vi isolere y i ligningen $-x^3 - x^2 + y^2 + 5x - 3 = 0$. Hertil kunne det være fristende at benytte kommandoen `isolate` til dette, men det er uklogt, idet `isolate` kun vil give os én af løsningerne. I stedet vælger vi (i kontekstmenuen) `Solve > Solve for variable > y`:

$$-x^3 - x^2 + y^2 + 5x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{solve for } y} \left[[y = \sqrt{x+3} (x-1)], [y = -\sqrt{x+3} (x-1)] \right]$$

Vi definerer så to funktioner ved de isolerede udtryk for y :

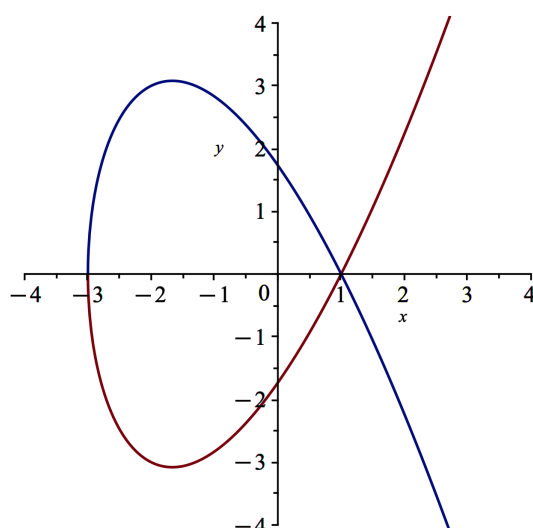
$$f(x) := \sqrt{x+3} (x-1)$$

$$f := x \mapsto \sqrt{3+x} \cdot (x-1) \quad (9.46)$$

$$g(x) := -\sqrt{x+3} (x-1)$$

$$g := x \mapsto -\sqrt{3+x} \cdot (x-1) \quad (9.47)$$

Og plotter disse i samme koordinatsystem:



Herefter kan vi bruge ganske almindelig arealbestemmelse:

Arealet mellem den røde kurve (graf for g) og x -aksen er bestemt ved

$$\int_{-3}^1 0 - f(x) \, dx = \frac{128}{15}$$

og arealet mellem den blå kurve (graf for g) og x -aksen er bestemt ved

$$\int_{-3}^1 g(x) \, dx = \frac{128}{15}$$

$$2 \cdot \frac{128}{15} = \frac{256}{15} \xrightarrow{\text{afrund}} 17.07$$

9.14 Kurvelængde

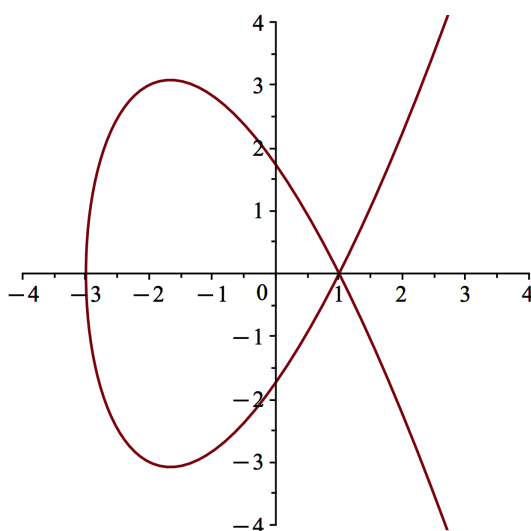
Vi skal her igen se på vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) := \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle$$

$$\vec{r} := t \mapsto \langle t^2 - 3, t^3 - 4t \rangle \quad (9.48)$$

med denne graf

$$\text{vektorPlot}(\vec{r}(t), \text{view} = [-4 \dots 4, -4 \dots 4])$$



Vi vil beregne længden af den kurve, der danner sløjfen. Fra vor tidligere viden om denne vektorfunktion ved vi, at dobbeltpunktet passerer til tidspunkterne $t = -2$ og $t = 2$.

Til bestemmelse af længden af den kurve, der gennemløbes i tidsrummet $[t_1, t_2]$ kan beregnes ved integralet:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

I vores eksempel får vi

$$\int_{-2}^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

Udregner vi dette integral ved at taste Enter (eller Alt+Enter) får vi et uforståeligt udtryk, der fylder flere linjer. Vi skal derfor tvinge Maple til at regne numerisk. Det gør vi ved at skrive grænserne som hhv -2.0 og 2.0 :

$$\int_{-2.0}^{2.0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt = 15.69399565$$

Så der er ca. 15.7 hele vejen rundt.

10 Funtioner af to variable

10.1 Forskrift og graf

Et godt eksempel på en funktion at begynde med er $f(x, y) = x^2 + y^2$. Den defineres i Maple ligesom en funktion af én variabel – blot skal der to variabler med her: typisk x og y :

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

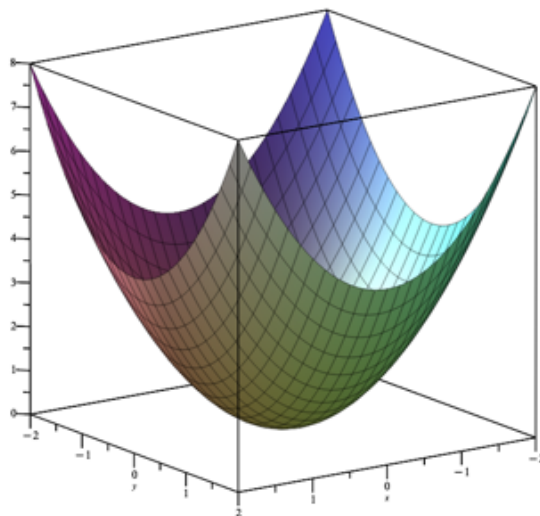
$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.1)$$

Udregning af funktionsværdier sker sådan her:

$$f(1, 2) = 5$$

Til at tegne grafen for en funktion af to variable benyttes kommandoen

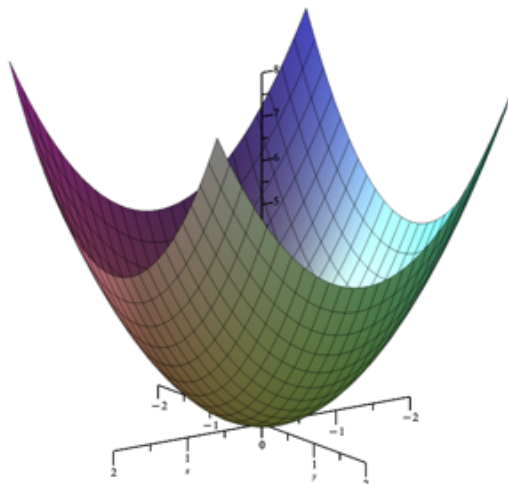
$$\text{plot3d}(f(x, y))$$



hvor xy -koordinatsystemet ligger i bunden af kassen og funktionsværdien i punktet (x, y) afsættes lodret over bunden af kassen.

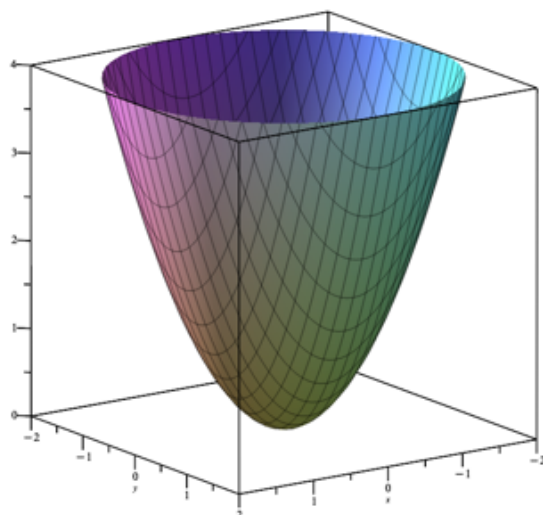
Du kan få grafen tegnet i et almindeligt 3D-koordinatsystem ved at klikke i grafen og vælge **Axes > Normal** i kontekstmenuen. Så kommer det til at se sådan ud:

$$\text{plot3d}(f(x, y))$$



Som grafen ser ud nu, ligner det vasketøj hængt til tørre, men det skyldes, at x - og y -værdierne er begrænsede til firkanten $[-2, 2] \times [-2, 2]$ og at den lodrette z -akse automatisk skaleres. Her får vi værdier i intervallet $[0, 4]$. Ved at begrænse intervallerne kan vi få en langt pænere graf:

`plot3d(f(x, y), x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, view = 0 .. 4)`



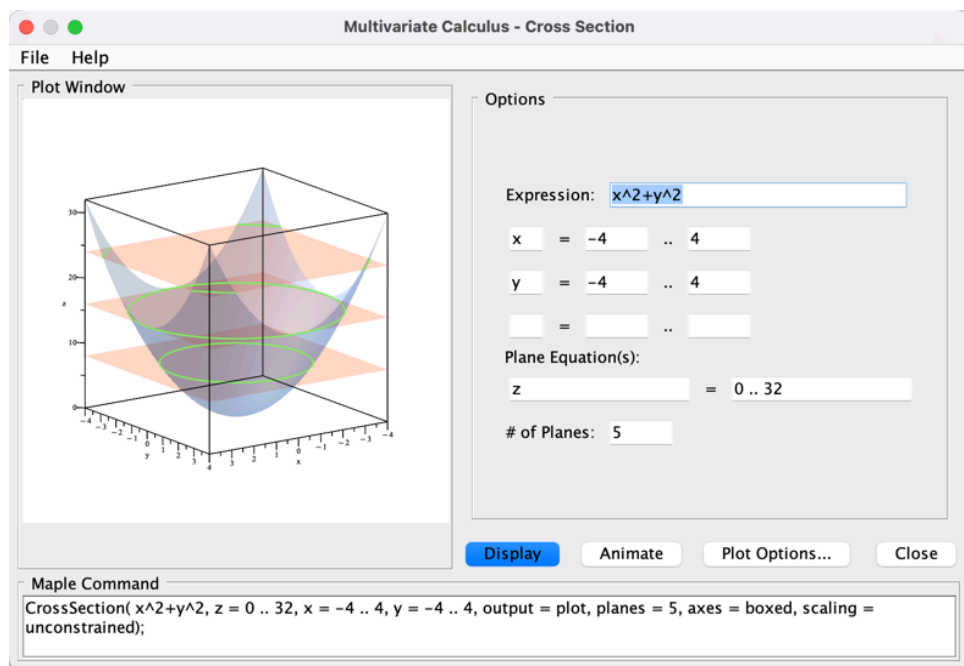
10.2 Lodrette og vandrette snit

For at opnå et dybere forståelse af, hvorfor grafen ser ud, som den gør, er det nyttigt at studere lodrette snit i grafen. Vi vil kun se på lodrette snit, hvor snitfladen er vinkelret på enten x -aksen eller y -aksen.

Da det er svært at tegne den slags, vil vi her ty til Maple Tatoren **Cross Sections**, der findes med menuvalget:

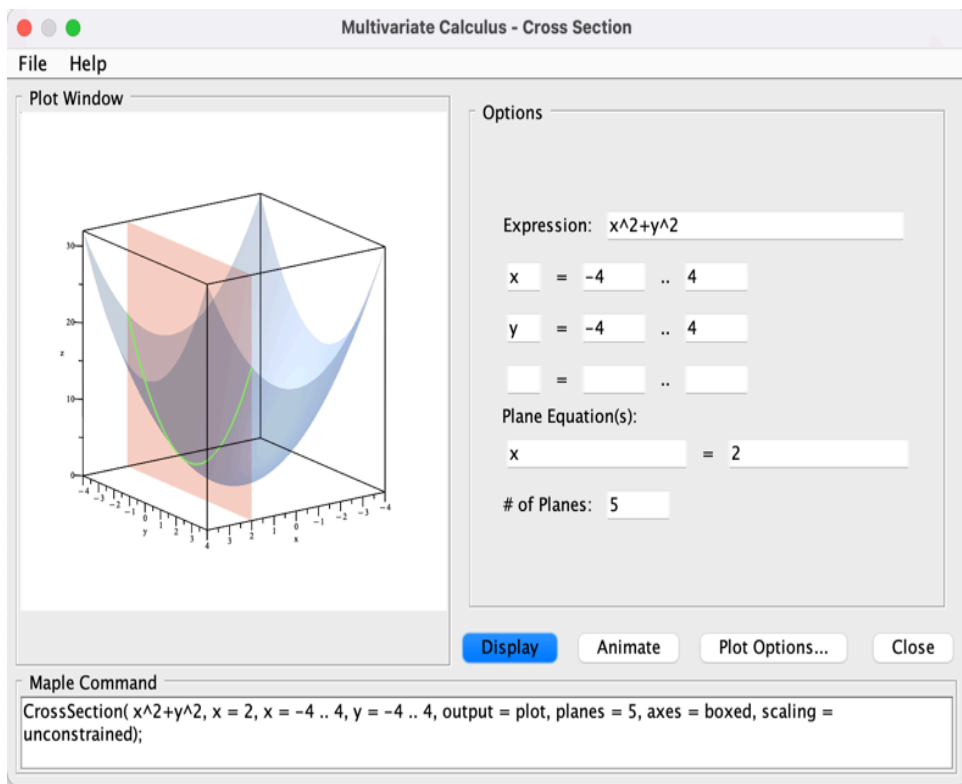
Tools > Tutors > Calculus Multivariate > Cross Sections ...

Som standard vises funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$:



- og som standard vises 5 vandrette snit i grafen, der alle er cirkler.

Hvis vi i stedet vil have et lodret snit vinkelret på x -aksen, så ændrer vi 'Plane equation(s)' til fx $x = 2$ og trykker på 'Display' knappen for at få snittet vist:



Og tilsvarende kan du få vist et lodret snit vinkelret på y -aksen ved i stedet at indtaste ligningen $y = 2$.

I begge tilfælde ses snitkurverne at blive parabler. Det kan man i øvrigt også nemt overbevise sig om ved at sætte $x = 2$ i funktionen:

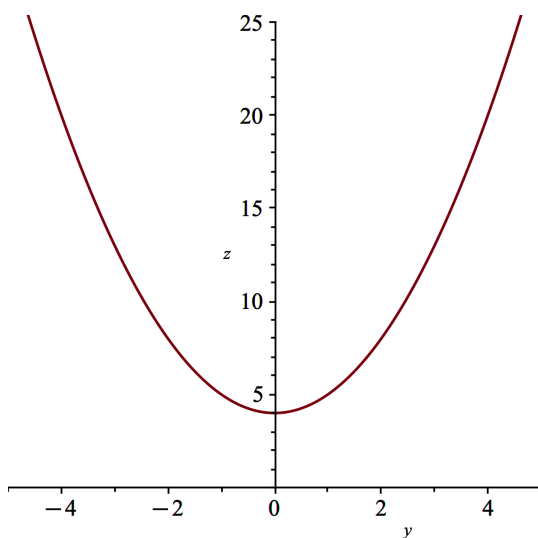
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.2)$$

$$f(2, y) = y^2 + 4$$

Der ses at være en parabel i et yz -koordinatsystem.

$$\text{plot}(y^2 + 4, y = -5 .. 5, z = 0 .. 25)$$



Og tilsvarende, hvis y holdes fast:

$$f(x, 2) = x^2 + 4$$

Der ses at være en parabel i et xz -koordinatsystem.

Eksempel 1

Vi skal her undersøge grafen for

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (10.3)$$

Holder vi x fast ved at sætte $x = a$, så bliver snitkurverne

$$f(a, y) = a^2 - y^2$$

hvilket er parabler i et yz -koordinatsystem., der vender grenene nedad.

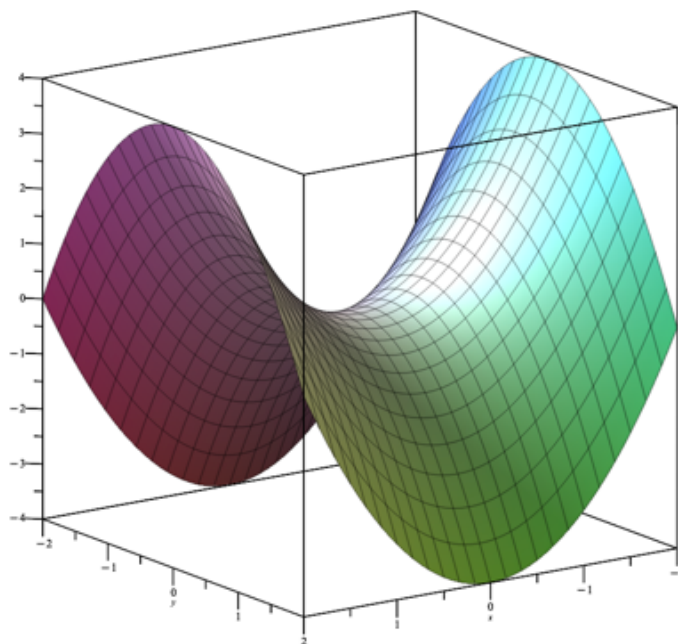
Holder vi y fast ved at sætte $y = a$, så bliver snitkurverne

$$f(x, a) = -a^2 + x^2$$

hvilket er parabler i et xz -koordinatsystem., der vender grenene opad.

Lad os se på grafen:

$$\text{plot3d}(f(x, y))$$



- og her ses tydeligt, at snittene er parabler, der vender hver sin vej. Der siges at være et saddelpunkt i $(0, 0)$. Grafen ligner jo lidt sådan en sadel man placerer på ryggen af en hest.

10.3 Niveaukurver

Niveaukurver fremkommer ved at projicere vandrette snitkurver i en 3D-graf ned på bunden af kassen (mere præcist: xy -planen), der plottes i.

Vi har allerede set, at vandrette snit i funktionen

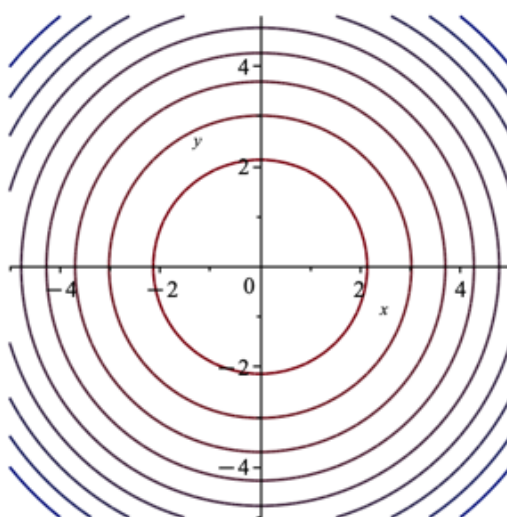
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.4)$$

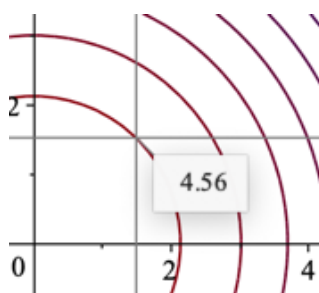
vil være cirkler. Derfor vil niveaukurverne for denne funktion være en række koncentriske cirkler:

with(Gym) :

niveaukurver (f(x, y), x = -5 ..5, y = -5 ..5)



Ved at holde markøren over kurverne vises den z -værdi, der hører til den pågældende kurve.



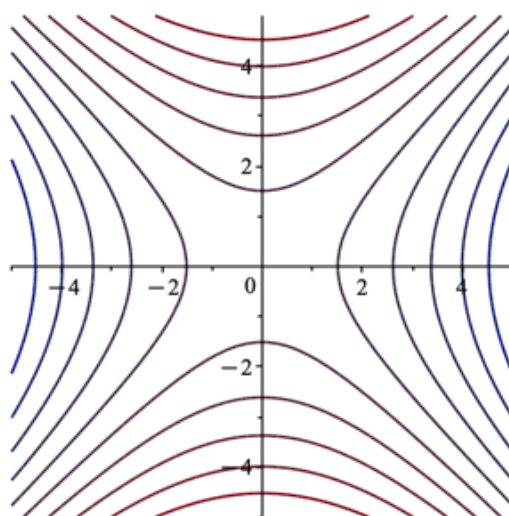
Der tegnes som standard (om muligt) 10 niveaukurver, der er farvet i en rød-blå skala, så jo mere blå en kurve er, jo større z -værdi.

Lad os også tegne niveaukurverne for

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (10.5)$$

niveaukurver ($f(x, y)$, $x = -5 \dots 5$, $y = -5 \dots 5$)



Her fremgår det tydeligt, at der er en sadde i $(0, 0)$:

Bevæger vi os fra 0 i x -aksens positive retning, får vi større og større værdier – det samme sker, hvis vi bevæger os i negativ retning.

Bevæger vi os fra 0 i y -aksens positive retning, får vi mindre og mindre værdier – det samme sker, hvis vi bevæger os i negativ retning.

Eksempel 1

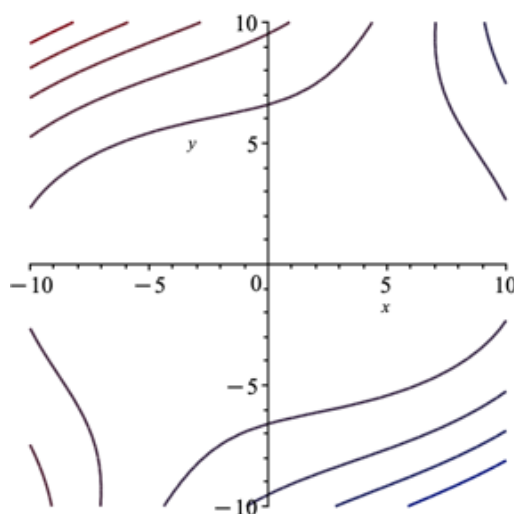
Her skal vi se et eksempel, hvor det ikke er helt simpelt at tegne niveaukurverne.

$$g(x, y) := 2x^3 + 6x \cdot y^2 - 3y^3 - 150x$$

$$g := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - 150 \cdot x \quad (10.6)$$

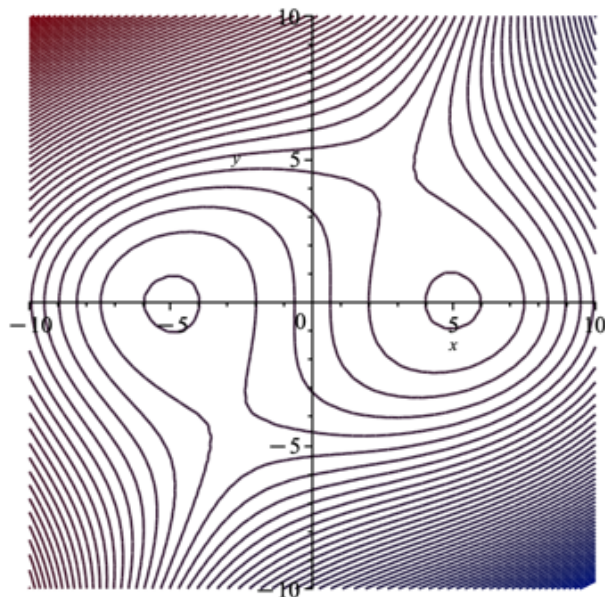
Til en start forsøger vi os med:

niveaukurver ($g(x, y)$, $x = -10 \dots 10$, $y = -10 \dots 10$)



Vi får tegnet alt for få niveaukurver, så vi øger antallet:

```
niveaukurver(g(x,y), x=-10..10, y=-10..10, konturer = 100, size = [350, 350])
```

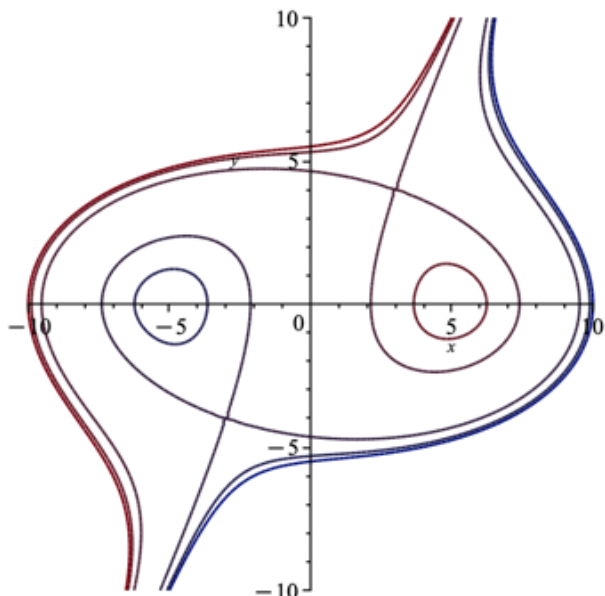


Kigger vi grundigt på niveaukurverne og bruger markøren til at aflæse værdier, ser det ud til, at der er et lokalt maksimum i $(-5, 0)$ og et lokalt minimum i $(5, 0)$.

Det kunne se ud til at der er et saddelpunkt i $(-3, -4)$ og i $(3, 4)$, men det kræver en nærmere undersøgelse at se dette.

Ved at tegne nogle specifikke niveaulinjer (konturer), kan vi få et kraftigere indicium på, at der sker noget i nærheden af disse punkter:

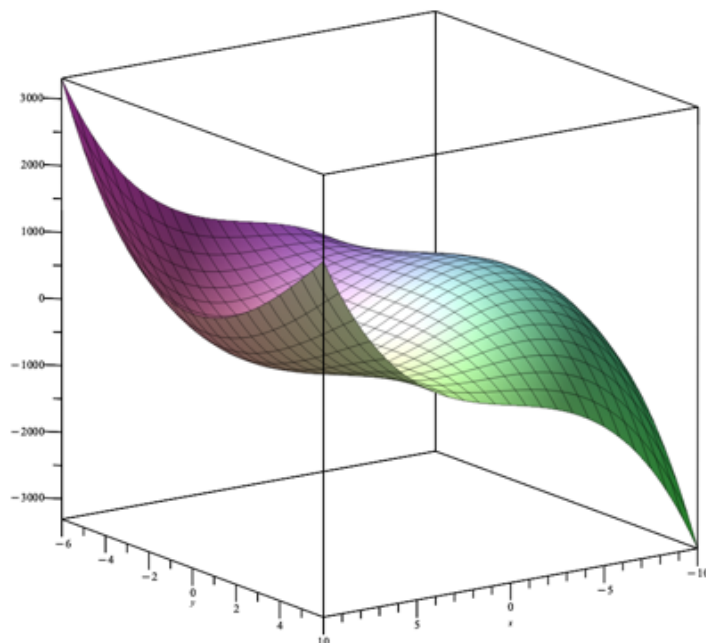
```
niveaukurver(g(x,y), x=-10..10, y=-10..10, konturer = [-500, -450, -300, 300, 450, 500], numpoints = 10000, size = [350, 350])
```



hvor det har været nødvendigt at sætte antallet af plotpunkter op for at kurven ikke skal være alt for takket.

Lad os til sidst se, hvordan grafen ser ud:

```
plot3d(g(x,y))
```



Vi vender tilbage til dette eksempel, hvor vi udregner den præcise beliggenheden af de punkter, hvor der er lokalt minimum, lokalt maksimum eller et saddelpunkt.

10.4 Partielle afledte og tangentplan

Vi starter med et simpelt eksempel, hvor vi nemt kan se, om der regnes rigtigt.

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.7)$$

De partielle afledte findes ved hjælp af skabelonen $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ der gemmer sig i 'Calculus'-paletten. Skabelonen udfyldes ved hjælp af TAB-tasten:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 2y$$

Eksempel 1

Bestem de partielle afledte af funktionen

$$g(x, y) := x^2 \cdot y$$

$$g := (x, y) \mapsto x^2 \cdot y \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(x, y)) = 2yx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(g(x, y)) = x^2$$

Eksempel 2

Bestem de partielle afledte af funktionen

$$h(x, y) := 2x^3 + 6x \cdot y^2 - 3y^3 - 150x$$

$$h := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - 150 \cdot x \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(h(x, y)) = 6x^2 + 6y^2 - 150$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(h(x, y)) = 12yx - 9y^2$$

I stedet for at benytte symbolet $\frac{\partial}{\partial x}$ kan man direkte skrive

$$\text{diff}(f(x, y), x) = 2x$$

$$\text{diff}(f(x, y), y) = 2y$$

Ofte betegnes disse afledte funktioner med f_x of f_y . For at kunne bruge disse navne, er vi nødt til at tvinge Maple til beregning. Hvis vi blot definerer $f_x(x, y) := \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))$, vil det ikke fungere, hvis vi sætter tal ind for x og y . I stedet skal vi definere således:

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.10)$$

$$f_x := \text{MakeFunction}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x, y), x, y\right)$$

$$f_x := (x, y) \mapsto 2 \cdot x \quad (10.11)$$

$$f_y := \text{MakeFunction}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x, y), x, y\right)$$

$$f_y := (x, y) \mapsto 2 \cdot y \quad (10.12)$$

Så kan vi udregne f_x

$$f_x(2, 1) = 4$$

Tangentplan

Tangentplanen i punktet (x_0, y_0, z_0) på grafen for en funktion af to variable er bestemt ved ligningen:

$$z = p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) + z_0$$

$$\text{hvor } p = f_x(x_0, y_0) \text{ og } q = f_y(x_0, y_0).$$

Eksempel 3

Tangentplanen til grafen for funktionen

$$f(x, y) := x^2 + y^2$$

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2 \quad (10.13)$$

i punktet $(2, 2, 5)$ bestemmes således:

Først defineres (copy & paste):

$$f_x := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_x := (x, y) \mapsto 2 \cdot x \quad (10.14)$$

$$f_y := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_y := (x, y) \mapsto 2 \cdot y \quad (10.15)$$

Dernæst kan vi udregne p og q :

$$p := f_x(2, 1) = 4$$

$$q := f_y(2, 1) = 2$$

Ligningen for tangentplanen bliver da:

$$z = p \cdot (x - 2) + q \cdot (y - 1) + 5$$

$$z = 4x - 5 + 2y \quad (10.16)$$

Med kommandoen *tangentplan* fra Gym-pakken klares det helt uden mellemregninger:

with(Gym) :

$$\text{tangentplan}(f(x, y), [x, y, z] = [2, 1, 5])$$

$$z = 4x - 5 + 2y \quad (10.17)$$

Eksempel 4

Vi skal her bestemme ligningen for tangentplanen i punktet $(-5, 0, 500)$ til grafen for

$$g(x, y) := 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$$

$$g := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - 150 \cdot x \quad (10.18)$$

Hvis vi har aflæst rigtigt på niveaukurverne, skal der være lokalt maksimum i dette punkt og tangentplanen skal være vandret. Lad os se:

$$g_x := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x, y), x, y \right)$$

$$g_x := (x, y) \mapsto 6 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2 - 150 \quad (10.19)$$

$$g_y := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial y} g(x, y), x, y \right)$$

$$g_y := (x, y) \mapsto 12 \cdot y \cdot x - 9 \cdot y^2 \quad (10.20)$$

Dernæst kan vi udregne p og q :

$$p := g_x(-5, 0) = 0$$

$$q := g_y(-5, 0) = 0$$

Ligningen for tangentplanen bliver da:

$$z = p \cdot (x - (-5)) + q \cdot (y - 0) + 500$$

$$z = 500 \quad (10.21)$$

Med kommandoen *tangentplan* fra Gym-pakken klares det helt uden mellemregninger:

with(Gym) :

$$\text{tangentplan}(g(x, y), [x, y, z] = [-5, 0, 500])$$

$$z = 500 \quad (10.22)$$

Lad os også lige prøve med punktet $(3, 4)$, der var en kandidat til et saddelpunkt

$$\text{tangentplan}(g(x, y), [x, y, z] = [3, 4])$$

$$z = -300 \quad (10.23)$$

Så punktet $(3, 4)$ ser ud til at være et saddelpunkt – i al fald er tangentplanen vandret.

10.5 Gradienten

Gradienten til en funktion $f(x, y)$ i to variable er defineret som 2D-vektoren:

$$\text{grad}(f, x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) \end{bmatrix}$$

så, hvis

$$f(x, y) := x^2 + y^2 :$$

er gradienten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Det kan være lidt omstændeligt at benytte dette udtryk til bregning af gradienten i et punkt, fx $(1, 2)$, idet vi ikke umiddelbart kan sætte tal ind i udtrykket. Men vi kan benytte 'Evaluate at point' og indtaste $x = 1$ og $y = 2$ i den dialogboks, der kommer frem.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{evaluate at point}} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Problemet er, at det ikke fremgår, at det er punktet $(1, 2)$, der er benyttet.

Gradienten udregnet med Gym-pakken:

Det er meget nemt at regne gradienten ud med kommandoen *gradient* i Gym-pakken:

with(Gym) :

$$\text{gradient}(f, [x, y]) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

og skal du bruge gradienten i et punkt fx $(1, 2)$, så udregnes den sådan

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [1, 2]) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

gradienten har den egenskab, at den angiver den retning, vi skal 'gå i', for at funktionsværdien vokser mest – forudsat gradienten er forskellig fra nul-vektoren.

Eksempel 1

Vi kan regne ud, hvor meget funktionen vokser, hvis vi går i en bestemt retning. Hertil benytter man en enhedsvektor i den pågældende retning.

Lad os benytte vores standardeksempel

$$f(x, y) := x^2 + y^2 :$$

og lad os antage, at vi står på grafen i punktet $(1, 2, 5)$.

Gradienten i dette punkt er

with(Gym) :

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [1, 2]) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En enhedsvektor i gradientens retning kan bestemmes ved

$$\vec{v} := \text{enhedsvektor}(\langle 2, 4 \rangle)$$

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Hvis vi bevæger os et skridt af længde 1 i gradientens retning, så kan tilvæksten i funktionsværdi udregnes som skalarproduktet

$$\Delta z = \langle 2, 4 \rangle \cdot \vec{v}$$

$$\Delta z = 2\sqrt{5} \quad (10.25)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$\Delta z = 4.4722 \quad (10.26)$$

Går vi et skridt af længde 1 i fx vinklen 45° , så går vi i en retning bestemt ved enhedsvektoren

$$\vec{e} := \left\langle \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle$$

$$\vec{e} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (10.27)$$

Tilvæksten i funktionsværdi er

$$\Delta z = \langle 2, 4 \rangle \cdot \vec{e}$$

$$\Delta z = 3\sqrt{2} \quad (10.28)$$

at 5 digits $\rightarrow$

$$\Delta z = 4.2426 \quad (10.29)$$

Altså en lidt mindre tilvækst end i gradientens retning.

10.6 Stationære punkter

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable.

Et punkt (x, y) kaldes et *stationært* punkt, hvis

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0 \text{ og } \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0$$

Ud fra den måde, hvorpå ligningen for tangentplanen er fastlagt, er det klart, at der er en vandret tangentplan i et stationært punkt.

De stationære punkter bestemmes ved at løse de to ligninger $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0$ og $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0$ som et system bestående af to ligninger med to ubekendte.

Lad os se på eksemplet:

$$g(x, y) := 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$$

$$g := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - 150 \cdot x \quad (10.30)$$

For at finde de stationære punkter løser vi

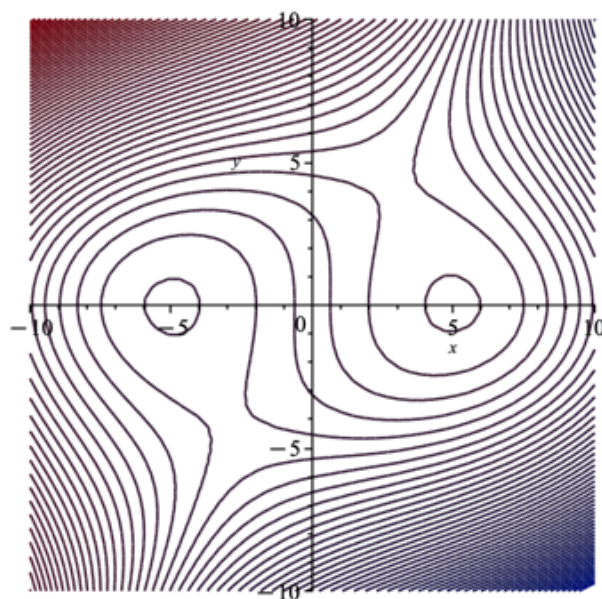
$$\text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(g(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(g(x, y)) = 0\right\}\right)$$

$$\{x = 5, y = 0\}, \{x = -5, y = 0\}, \{x = 3, y = 4\}, \{x = -3, y = -4\} \quad (10.31)$$

Så her er der 4 stationære punkter, hvor der er vandret tangentplan.

Tager vi igen et kig på niveaukurverne for g , kan vi se, at det ser meget fornuftigt ud

niveaukurver ($g(x, y)$, $x = -10 \dots 10$, $y = -10 \dots 10$, *konturer* = 100)



Men vi ved stadig ikke, hvorvidt der er tale om lokale maksima / minima eller saddelpunkter i de enkelte stationære punkter. Det ser vi på i næste afsnit.

10.7 Arten af stationære punkter

Når vi differentierer en funktion f af to variable med hensyn til hhv. x og y , får vi to nye funktioner, vi har betegnet f_x og f_y :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) \text{ og } f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))$$

Hvis disse er differentiable, kan vi differentiere dem igen med hensyn til både x og y , hvilket giver os nogle dobbelt-afledte og blandede-afledte:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x, y))$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x, y))$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x, y))$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y(x, y))$$

Hvis de dobbelt-afledte og de blandede afledte af f er kontinuerte, kan man vise, at de to blandede afledte ens, altså $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Som betegnelse for den blandede afledte benyttes f_{xy} .

At få alle disse funktioner defineret i Maple, så de kan bruges som funktioner, er noget af et tastearbejde. Det kommer til at se sådan ud

$$f_x := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_x := (x, y) \mapsto 2 \cdot x \quad (10.32)$$

$$f_y := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_y := (x, y) \mapsto -2 \cdot y \quad (10.33)$$

$$f_{xx} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_{xx} := (x, y) \mapsto 2 \quad (10.34)$$

$$f_{yy} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y), x, y \right)$$

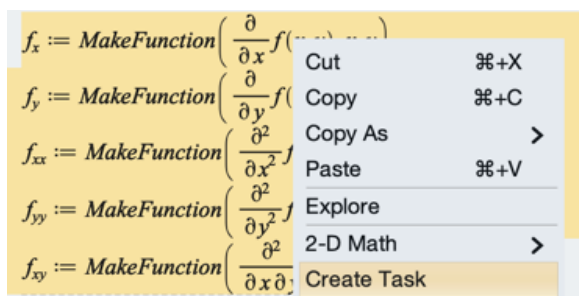
$$f_{yy} := (x, y) \mapsto -2 \quad (10.35)$$

$$f_{xy} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y), x, y \right)$$

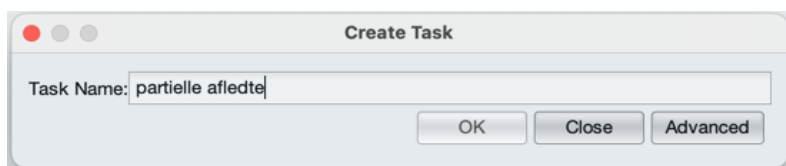
$$f_{xy} := (x, y) \mapsto 0 \quad (10.36)$$

TIP:

Hvis du kommer til at arbejde meget med disse funktioner, kan du få dem lagt ind i en palette ved at markere de 5 definitioner (træk med markøren over alle definitioner, så hele området bliver blått. Højre-klik derefter i det markerede, og vælg 'Create Task'



og giv et navn til task'en:



Der skulle nu være dukket en ny palette op (den ligger allernederst i listen, men du kan trække den længere op, hvis du vil):



Når du fremover skal bruge definitionerne, skal du blot klikke på 'partielle afledte' i Task-paletten, og de 5 definitioner vil blive indsat på markørens position (hvis muligt).

Det nemmeste er naturligvis, hvis du altid betegner funktionen med navnet f – ellers skal du rette i alle 5 definitioner.

I forbindelse med bestemmelse af arten af et stationært punkt, får vi brug for en størrelse, der hedder determinanten. Denne er

$$\Delta(x, y) := f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

$$\Delta := (x, y) \mapsto f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \quad (10.37)$$

(Denne kan du også gemme i Tasks)

Der gælder denne sætning:

Lad $P_0(x_0, y_0)$ betegne et stationært punkt for funktionen f .

Der gælder

1. Hvis $\Delta(x_0, y_0) > 0$ og $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, så har f lokalt minimum i $P_0(x_0, y_0)$
2. Hvis $\Delta(x_0, y_0) > 0$ og $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, så har f lokalt maksimum i $P_0(x_0, y_0)$
3. Hvis $\Delta(x_0, y_0) < 0$, så har f et saddepunkt i $P_0(x_0, y_0)$
4. Hvis $\Delta(x_0, y_0) = 0$, kan vi ikke slutte noget (med denne metode)

Eksempel 1

Vi ser igen på eksemplet (hvor funktionen nu hedder f):

$$f(x, y) := 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$$

$$f := (x, y) \mapsto 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - 150 \cdot x \quad (10.38)$$

Hent så alle definitioner ind fra Task-paletten – og sørg for, at alle linjer bliver eksekveret:

$$f_x := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_x := (x, y) \mapsto 6 \cdot x^2 + 6 \cdot y^2 - 150 \quad (10.39)$$

$$f_y := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_y := (x, y) \mapsto 12 \cdot y \cdot x - 9 \cdot y^2 \quad (10.40)$$

$$f_{xx} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_{xx} := (x, y) \mapsto 12 \cdot x \quad (10.41)$$

$$f_{yy} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_{yy} := (x, y) \mapsto 12 \cdot x - 18 \cdot y \quad (10.42)$$

$$f_{xy} := \text{MakeFunction} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y), x, y \right)$$

$$f_{xy} := (x, y) \mapsto 12 \cdot y \quad (10.43)$$

De stationære punkter er

$$\text{solve}(\{f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0\})$$

$$\{x = 5, y = 0\}, \{x = -5, y = 0\}, \{x = 3, y = 4\}, \{x = -3, y = -4\} \quad (10.44)$$

Hent så diskriminanten:

$$\Delta(x, y) := f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

$$\Delta := (x, y) \mapsto f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 \quad (10.45)$$

Og sørg for, at denne bliver eksekveret.

Så er vi klar til at tjekke de enkelte punkter:

$$\Delta(5, 0) = 3600$$

$$f_{xx}(5, 0) = 60$$

Der er altså lokalt minimum i $(5, 0)$.

$$\Delta(-5, 0) = 3600$$

$$f_{xx}(-5, 0) = -60$$

Der er altså lokalt maksimum i $(-5, 0)$.

$$\Delta(3, 4) = -3600$$

$$\Delta(-3, -4) = -3600$$

Der er altså saddepunkter i $(3, 4)$ og i $(-3, -4)$.

I formelsamlingen er der indført betegnelserne

$$r = f_{xx}(x_0, y_0)$$

$$s = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$t = f_{yy}(x_0, y_0)$$

Med disse betegnelser bliver determinanten

$$\Delta = r \cdot t - s^2$$

Disse betegnelser vil også blive brugt i det output der kommer fra funktionen *art* fra Gym-pakken, som vi skal se på i næste eksempel

Eksempel 2 - med Gym-pakken

Vi ser igen på eksemplet:

$$g(x, y) := 2x^3 + 6x \cdot y^2 - 3y^3 - 150x :$$

- og bestemmer de stationære punkter.

$$\text{solve} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(g(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(g(x, y)) = 0 \right\} \right) \\ \{x = 5, y = 0\}, \{x = -5, y = 0\}, \{x = 3, y = 4\}, \{x = -3, y = -4\} \quad (10.46)$$

Funktionen *art* bestemmer nu arten af de stationære punkter:

with(Gym) :

$$\text{art}(g(x, y), [x, y] = [5, 0])$$

$$r = 60 \quad s = 0 \quad t = 60$$

Determinanten er

$$\Delta = r \cdot t - s^2 = 3600$$

Da $\Delta > 0$ og $r > 0$ har funktionen lokalt minimum i

$$[5, 0]$$

og funktionsværdien er -500

$$\text{art}(g(x, y), [x, y] = [-5, 0])$$

$$r = -60 \quad s = 0 \quad t = -60$$

Determinanten er

$$\Delta = r \cdot t - s^2 = 3600$$

Da $\Delta > 0$ og $r < 0$ har funktionen lokalt maksimum i

$$[-5, 0]$$

og funktionsværdien er 500

$$\text{art}(g(x, y), [x, y] = [3, 4])$$

$$r = 36 \quad s = 48 \quad t = -36$$

Determinanten er

$$\Delta = r \cdot t - s^2 = -3600$$

Da $\Delta < 0$ har funktionen et saddelepunkt i

$$[3, 4]$$

og funktionsværdien er -300

$$\text{art}(g(x, y), [x, y] = [-3, -4])$$

$$r = -36 \quad s = -48 \quad t = 36$$

Determinanten er

$$\Delta = r \cdot t - s^2 = -3600$$

Da $\Delta < 0$ har funktionen et saddepunkt i

$$[-3, -4]$$

og funktionsværdien er 300

Så let kan det gøres, men det er vigtigt, at du er med på, hvad der sker bag kulisserne.

11 Chi2-Test

11.1 Inden du begynder

Læsevejledning til

At træffe sine valg i en usikker verden - eller den statistiske modellerings rolle.

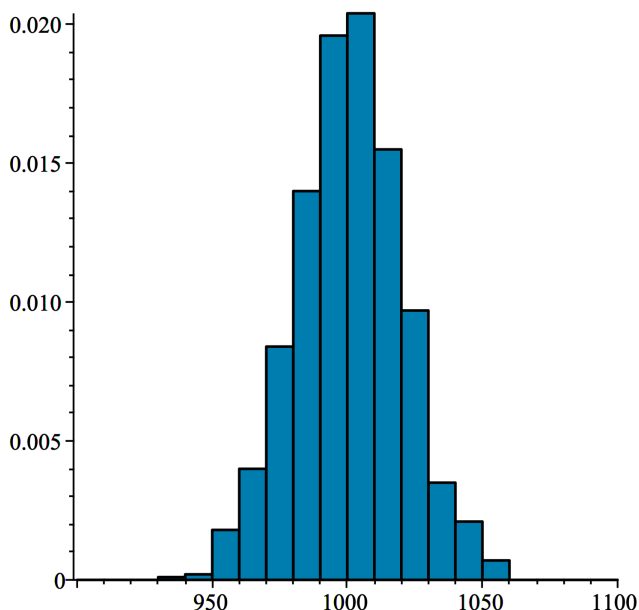
Af Susanne Christensen

Umiddelbart kræver det ikke de store forudsætninger at læse artiklen. Med denne læsevejledning kan du kan blive mere fortrolig med begrebet stokastisk variabel, dens sandsynlighedsfordeling og dens fordelingsfunktion inden du læser artiklen.

Eksemplerne nedenfor er hentet fra artiklen.

Virkeligheden - den virkelige verden

Indholdet af en pose med 1 kg sukker vejer ikke præcist 1 kg – altid lidt mere eller lidt mindre. Laver du en vejning af indholdet af 100 poser med 1 kg sukker (med en præcision på 0.1 gram), vil du få en lang række forskellige resultater. For at danne et overblik, kan du gruppere disse i intervaller af længde 10, udregne intervalfrekvenserne og tegne et histogram. Det kunne se således ud:



Som du har set ovenfor, så kan vægten af indholdet af en pose med 1 kg sukker antage mange forskellige værdier. En værdi mellem 980 g og 1020 g ser ud til at være det mest almindelige, men der forekommer også værdier i intervallet $[950, 960]$ og i $[1050, 1060]$, disse er dog ikke nær så hyppige.

Hvis du vil bestemme hvor mange procent af vejningerne der falder i et bestemt interval – fx $[950, 980]$ – skal du lægge intervalfrekvenserne for de tre intervaller sammen. Dette svarer til at finde arealet af de tre stolper over intervallerne $[950, 960]$, $[960, 970]$ og $[970, 980]$.

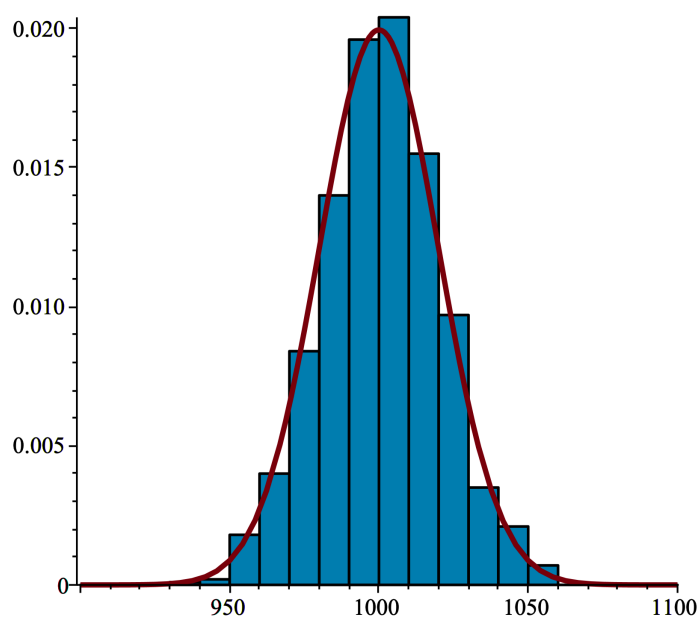
Arealet af alle stolperne i histogrammet er 1 (eller 100%, om du vil)

Modellen - den idealiserede verden

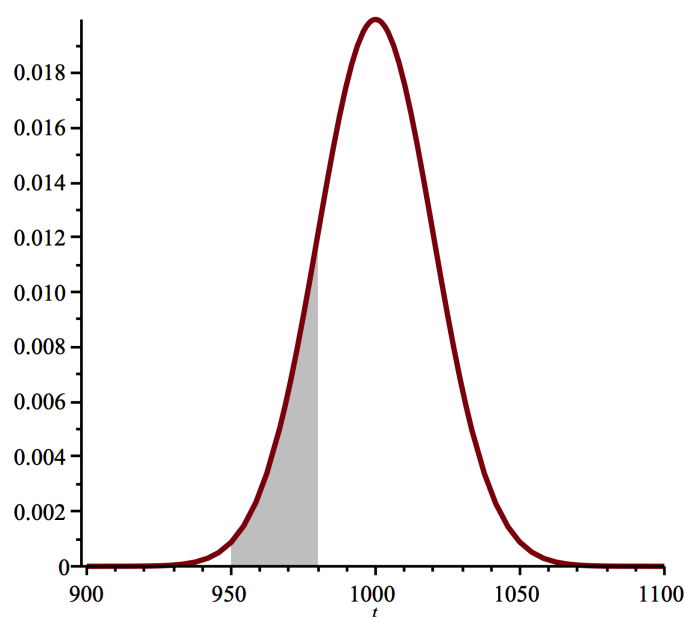
Hvis du øger antallet af posere, du vejer, mindsker intervalbredden og øger din præcision i vejningen, så vil dit histogram efterhånden udjævnnes og blive til en kontinuert funktion φ .

Dette kræver dog, at antallet af posere, du vejer, er uendelig stort, intervalbredden uendelig lille og præcisionen i vejningen uendelig fin.

Nedenfor ser du denne kontinuerte funktion φ indtegnet sammen med histogrammet:



Hvis du i modellen vil finde den procentdel af observationerne der falder i intervallet $[950, 980]$, så skal du finde arealet af punktmængden, der er begrænset af førsteaksen, grafen for φ og linjerne $x = 950$ og $x = 980$



Så den simple addition af intervalfrekvenser må i modellen erstattes af beregning af integralet:

$$\int_{950}^{980} \varphi(x) \, dx$$

I modellen knytter vi en størrelse X til en vejning:

$$X = \text{vægten af indholdet af en 1 kg sukkerpose}$$

X kaldes en stokastisk variabel. Det betyder, at X kan antage alle mulige værdier, og vi har umiddelbart ingen anelse om hvilken værdi.

På engelsk hedder det 'Random variable', hvor 'random' bedst oversættes til 'tilfældig'. Det er ikke variabelen X , der er tilfældig, men den værdi, X antager, er tilfældig.

Formelt set, kan vægten af indholdet af en 1 kg sukkerpose være et vilkårligt reelt tal (og der er jo uendeligt mange af), så det giver det ikke mening at spørge om, hvad sandsynligheden er for at X antager en bestemt værdi.

Derimod giver det god mening at spørge om, hvad sandsynligheden er for at X antager en værdi, der er mindre end eller lig med fx 980. Skulle du give et svar på baggrund af histogrammet i 'den virkelige verden', så ville du finde den kumulerede frekvens for 980 ved at lægge intervallfrekvenser sammen – eller med andre ord, finde arealet af stolperne i histogrammet der ligger før 980.

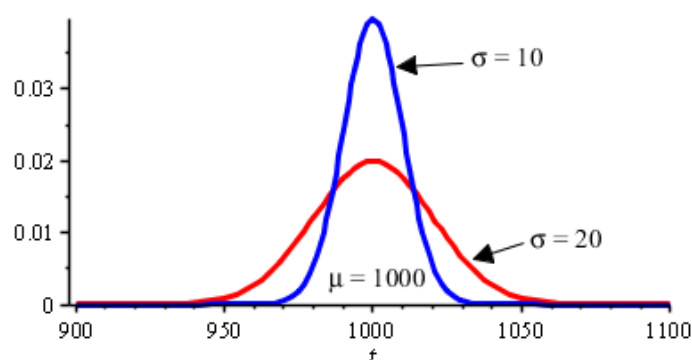
I modellen svarer dette til at bestemme integralet (arealet):

$$\int_{-\infty}^{980} \varphi(x) \, dx$$

Funktionen φ kaldes for sandsynlighedsfordelingen for X .

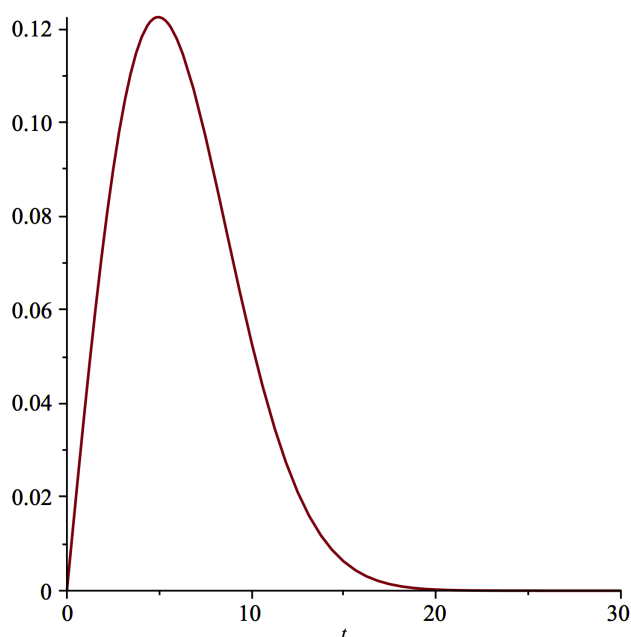
Sandsynlighedsfordelingen (tæthedsfunktionen)

Der skal to parametre til at beskrive en klokkekurve som φ : Den ene er symmetriaksen (middelværdien μ), og den anden fastlægger 'bredden' (spredningen σ).



Hvis en stokastisk variabel X følger denne fordeling, så siges X at være normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ . Kort skrives det således $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Der findes mange andre sandsynlighedsfordelinger end normalfordelingen. Fx denne (Weibull fordeling):



der bestemt ikke er en normalfordeling. Konkret viser denne fordelingen af vindhastigheder på en bestemt lokalitet. Af fordelingen fremgår, at middelvindhastigheden er omkring 7, at der af og til er næsten vindstille og ganske sjældent vindhastigheder over 15 m/s.

I princippet kan alle ikke-negative funktioner bruges som en sandsynlighedsfordeling, hvis blot den opfylder, at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$ – eller med andre ord, at 'summen af alle sandsynligheder er 1'.

Tænk på en sandsynlighedsfordeling således:

Du har 1 liter sandsynlighedsmaling, du skal smøre ud på x-aksen. Sandsynlighedsfordelingen viser så, hvor du har smurt på og hvor tykt et lag du har smurt på.

Af denne grund kaldes sandsynlighedsfordelingen ofte for tæthedsfunktionen

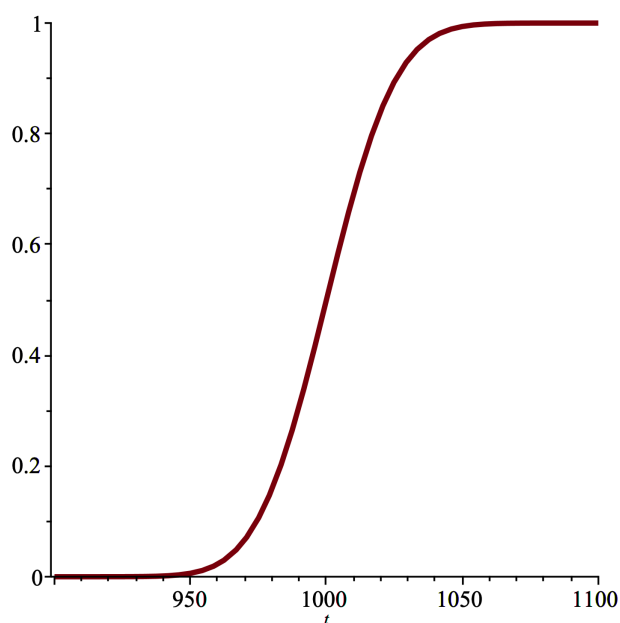
Fordelingsfunktionen

Svarende til, at du i forbindelse med et grupperet observationssæt kan tegne en sumkurve på basis af de kumulerede intervalfrekvenser (husk, at det er arealer af søjler i histogrammet), kan du i modellen tegne arealfunktionen F for sandsynlighedsfordelingen f .

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) \, dx$$

Husk, at når du bestemmer arealer under sandsynlighedsfordelingen, så er det faktisk intervalsandsynligheder du finder. Her er det sandsynligheden for at få en værdi i intervallet $]-\infty, t]$. Dette kan også udtrykkes som sandsynligheden for at X antager en værdi mindre end eller lig med t – kort $P(X \leq t)$.

For sandsynlighedsfordelingen ϕ hørende til $X \sim N(1000, 20)$ ser grafen for F således ud:



Funktionen F kaldes fordelingsfunktionen for f .

Oversigt over begreber i model og virkelighed

Virkelighed	Model
Observerede data	Værdier af en stokastisk variabel
Intervalfrekvens	Intervalsandsynlighed
Gennemsnit	Middelværdi
Histogram	Sandsynlighedsfordeling (graf), tæthedsfunktion
Sumkurve	Fordelingsfunktion (graf)

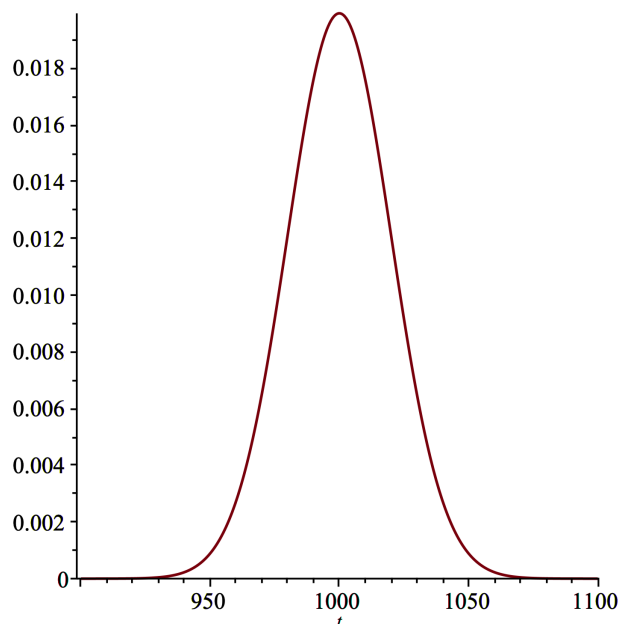
Sådan fungerer det i Gym-pakken

with(Gym) :

Sandsynlighedsfordelingen for normalfordelt stokastisk variabel er indbygget i Gym-pakken. Den hedder *normalpdf* (pdf står for 'probability density function', hvor density betyder tæthed).

Hvis du skal tegne sandsynlighedsfordelingen for stokastisk variabel X med middelværdi 1000 og spredning 20:

`plot(normalpdf (1000, 20, t), t = 900 ..1100 )`



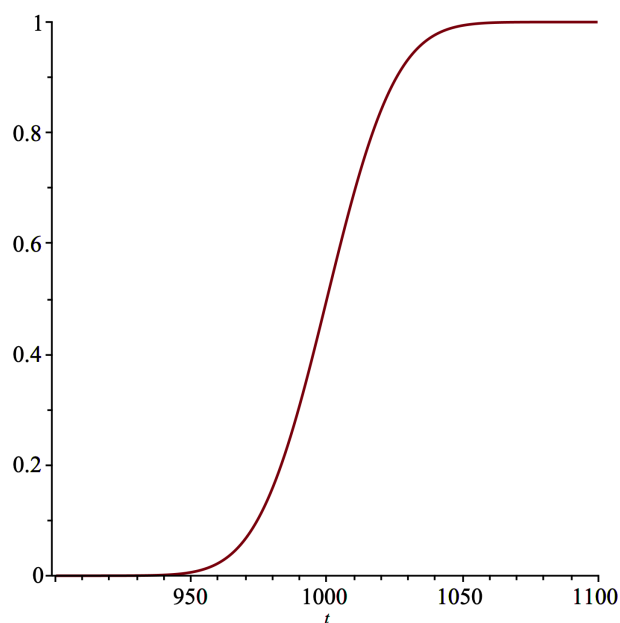
Hvis du vil bestemme sandsynligheden for, at X antager en værdi i intervallet $[950, 980]$, udregner du dette integral:

$$\int_{950}^{980} \text{normalpdf}(1000, 20, t) dt = 0.1524455885$$

Dvs., at sandsynligheden for at havne i dette interval er ca 0.15.

Fordelingsfunktionen er også i Gym-pakken. Den hedder *normalcdf* (cumulative distribution function):

`plot(normalcdf (1000, 20, t), t = 900 ..1100 )`



Hvis fx X er knyttet til vejning af sukkerposer, så betyder

$$\text{normalcdf}(1000, 20, 1020) = 0.8413447460$$

at 84% af alle sukkerposer vejer højst 1020 g.

Hvis du skal bestemme, hvor meget de 25% tungeste poser vejer, så svarer dette til at løse ligningen $normal(1000, 20, t) = 0.75$. Det klares let og elegant med funktionen *invnorm* :

$invnorm(1000, 20, 0.75) = 1013.48979500393$

Det betyder, at de tungeste 25% vejer over 1013.5 g.

Bemærkning:

I princippet kan du løse ligningen $normal(1000, 20, t) = 0.75$ direkte, men det er ikke problemfrit. Det kan ikke anbefales at prøve med *solve*, idet det kan tage en frygtelig tid at finde en løsning – og ofte er det, der kommer ud, aldeles ulæseligt.

fsolve vil heller ikke altid virke her, da den render galt i byen – med mindre rutinen udstyres med en passende startværdi (eller et søgeinterval):

$fsolve(normalcdf(1000, 20, t) = 0.75, t = 1000) = 1013.489795$

Sådan fungerer det med stokastiske variable (Avanceret)

with(Statistics) :

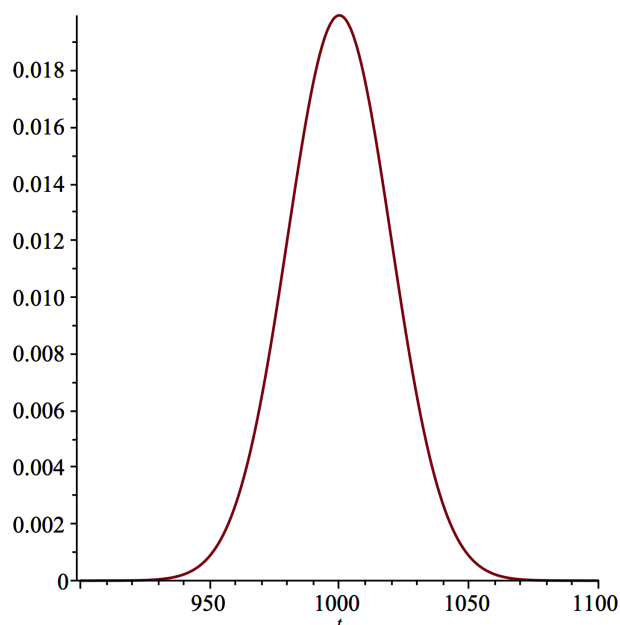
Start med at definere en stokastisk variabel X med middelværdi 1000 og spredning 20:

$X := RandomVariable(Normal(1000, 20))$

$X := _R294$ (11.1)

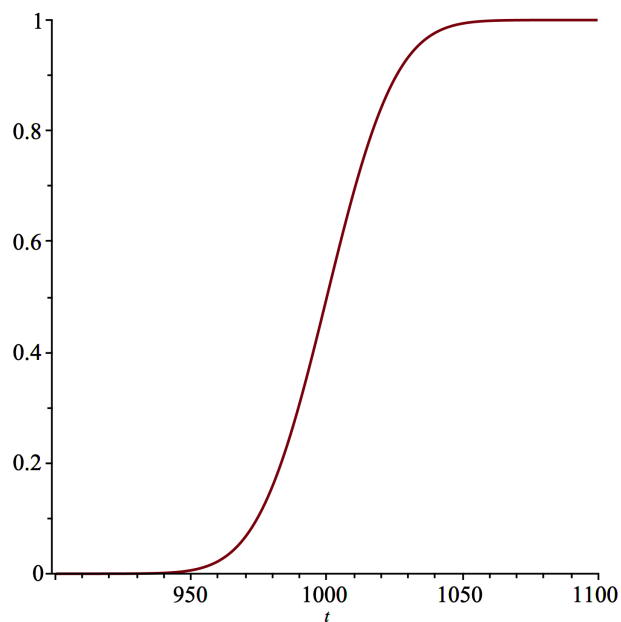
Med denne definition har den automatisk defineret tæthedsfunktionen under navnet $PDF(X, t)$. Grafen tegnes sådan:

$plot(PDF(X, t), t = 900 .. 1100)$



Fordelingsfunktionen har du også direkte adgang til. Den hedder CDF:

`plot(CDF(X, t), t = 900 ..1100)`



Hvis fx X er knyttet til vejning af sukkerposer, så betyder

$$CDF(X, 1020) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.84134$$

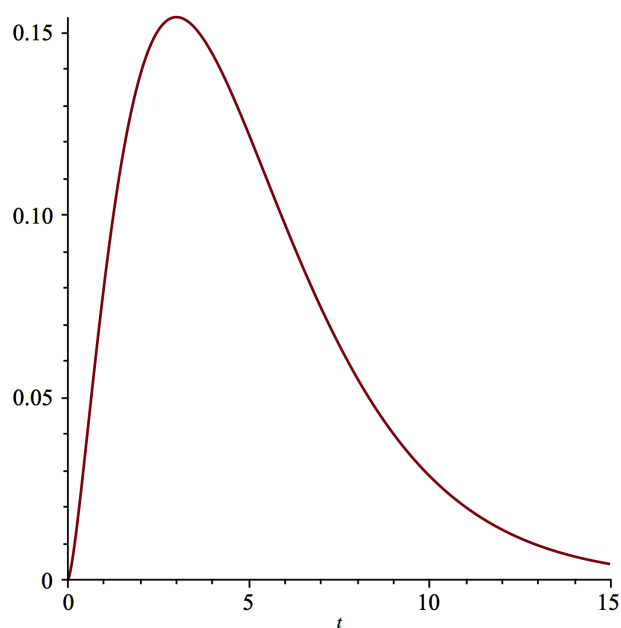
at 84% af alle sukkerposer vejer højst 1020 g.

Chi2 - fordelingen

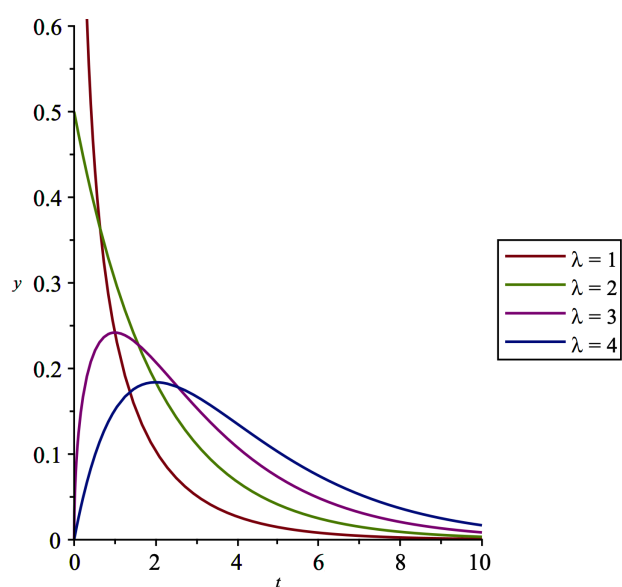
with(Gym) :

Tæthedsfunktionen (sandsynlighedsfordelingssfunktionen) for en χ^2 fordeling styres af én parameter λ – kaldet antallet af frihedsgrader. Med $\lambda = 5$ ser det sådan ud

`plot(chipdf(5, t), t = 0 ..15)`



For andre frihedsgrader ser χ^2 fordelingen sådan ud



Arbejdet med χ^2 fordelingen, herunder bestemmelse af sandsynligheder, foregår vha. integraler præcis som ved normalfordelingen.

11.2 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 1 (p2-7)

Eksempel 1

Vi udvælger et antal unge mellem 15 og 20 år tilfældigt og spørger dem om, hvor mange penge, de bruger på tøj om måneden.

Så tæller vi op, hvor mange kvinder, der bruger mere end 1500 kr., og hvor mange mænd.

Vores resultat af undersøgelsen kan vi organisere i en tabel som nedenfor:

	< 1500 kr./måned	≥ 1500 kr./måned	I alt
Kvinder	98	102	200
Mænd	60	100	160
I alts	158	202	360

Tast data for de to kategorier ind i en lister:

Kvinder := [98, 102] = [98, 102]

Mænd := [60, 100] = [60, 100]

- og saml til en tabel (eller matrix):

obs := *Matrix*([*Kvinder*, *Mænd*]) = $\begin{bmatrix} 98 & 102 \\ 60 & 100 \end{bmatrix}$

Vi tester hypotesen:

H_0 : Der er uafhængighed mellem de to inddelingskriterier (dvs., at forbrugsmønsteret er ens for de to køn)

mod alternativet

H_1 : Der er ikke uafhængighed mellem de to inddelingskriterier

with(*Gym*) :

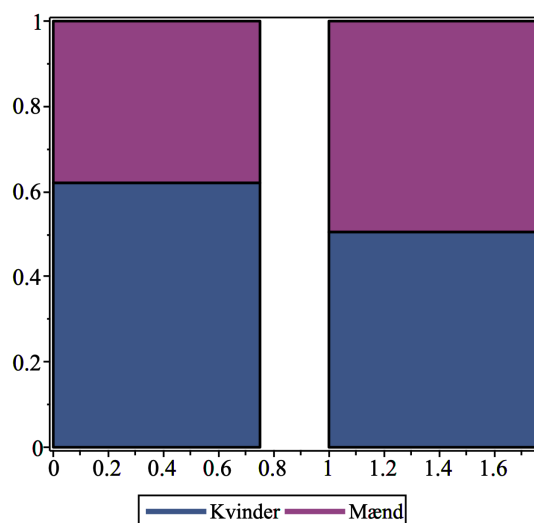
De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

forv := *forventet*(*obs*) = $\begin{bmatrix} 87.778 & 112.22 \\ 70.222 & 89.778 \end{bmatrix}$

Stakkede søjlediagrammer kan tegnes:

with(*Statistics*) :

ColumnGraph([*Kvinder*, *Mænd*], *legend* = ["Kvinder", "Mænd"], *scale* = *relative*, *format* = *stacked*)



χ^2 -teststørrelsen skal beregnes. Her kan du bestemme de enkelte cellers bidrag med

$$\text{bidrag}(\text{obs}) = \begin{bmatrix} 1.190436005 & 0.9311331094 \\ 1.488045006 & 1.163916391 \end{bmatrix}$$

- og vil du have rækker og søjler summeret, så gør du således:

$$\text{tabelsum}(\text{bidrag}(\text{obs})) = \begin{bmatrix} 1.190436005 & 0.9311331094 & 2.121569114 \\ 1.488045006 & 1.163916391 & 2.651961397 \\ 2.678481011 & 2.095049500 & 4.773530511 \end{bmatrix}$$

I nederste højre celle kan du se, at χ^2 -teststørrelsen, Q , er 4.772975907.

Du kan hurtigt få udregnet χ^2 -teststørrelsen med kommandoen

$$Q := \text{chi2Teststørrelse}(\text{obs})$$

$$Q := 4.773530511$$

(11.2)

Tast ind i en antaltabel

Du kan vælge at indtast dine observationer i en antaltabel med række- og søjlelabels samt række- og søjlesummer. Der skal stå "Observeret" i den øverste celle:

$$A := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 98 & 102 & 200 \\ \text{"Mænd"} & 60 & 100 & 160 \\ \text{"I alt"} & 158 & 202 & 360 \end{bmatrix} :$$

Du kan bruge denne matrix som input til *forventet* funktionen

$F := \text{forventet}(A)$

$$F := \begin{bmatrix} \text{"Forventet"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 87.778 & 112.22 & 200 \\ \text{"Mænd"} & 70.222 & 89.778 & 160 \\ \text{"I alt"} & 158 & 202 & 360 \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Og bidragene til χ^2 -teststørrelsen findes ved

$\text{bidrag}(A)$

$$\begin{bmatrix} \text{"Bidrag"} & \text{"Lavt"} & \text{"Højt"} & \text{"I alt"} \\ \text{"Kvinder"} & 1.190436005 & 0.9311331094 & 2.121569114 \\ \text{"Mænd"} & 1.488045006 & 1.163916391 & 2.651961397 \\ \text{"I alt"} & 2.678481011 & 2.095049500 & 4.773530511 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Teststørrelsen Q er χ^2 -fordelt med 1 frihedsgrad

Hypotesen må forkastes, hvis værdien af Q er stor. Da $Q \geq 0$ betyder det, at en χ^2 -test altid vil være højresidet.

Du kan tænke således på frihedsgrader

Hvis du selv skulle fylde tabellen ud med observerede værdier (uden at skulle spørge 200 kvinder og 160 mænd) og det skal se rimeligt ud (ingen negative værdier i tabellen), så er du bundet af, at både række og søjlesummerne skal passe.

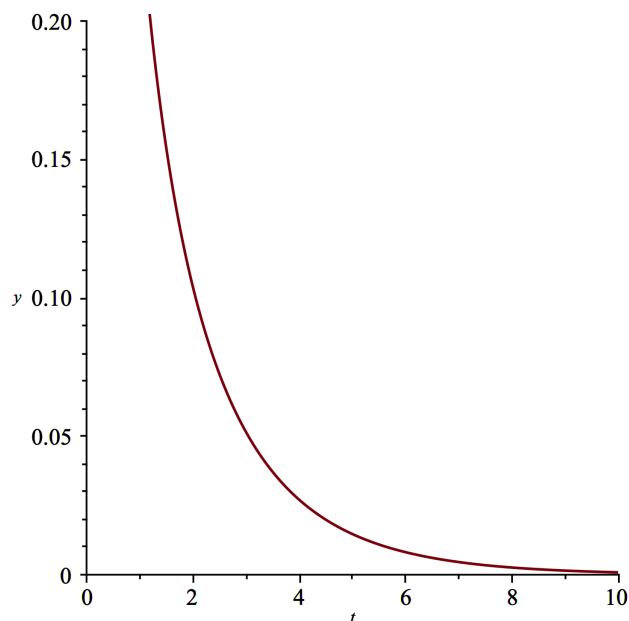
		200
		160
158	202	360

Sætter du x ind i det øverste felt, så kan du udtrykke alle øvrige celler vha. dette x . Den ene frihedsgrad betyder, at du kan vælge indholdet af én celle frit – de øvrige cellers indhold er da bestemt ved dit valg og bindingerne.

x	$200 - x$	200
$158 - x$	$x + 2$	160
158	202	360

Vi plotter sandsynlighedsfordelingen for Q :

```
plot(chipdf(1, t), t = 0 .. 10, y = 0 .. 0.2)
```



Test på niveau 5%:

(Nedenfor kan du ændre niveauet til 1%, hvis du vil checke det andet tilfælde der regnes på)

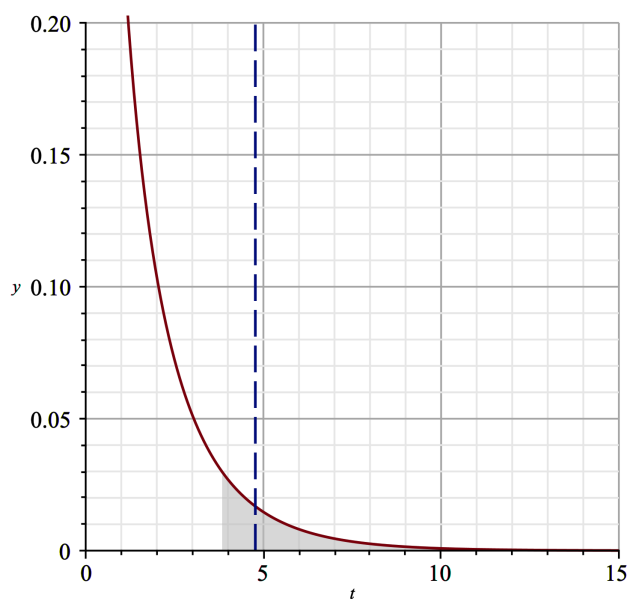
$niveau := 0.05$:

For at finde den kritiske værdi skal vi have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_k^{\infty} chipdf(1, t) dt = niveau, k\right) = 3.841458820$$

En værdi af Q større end 3.84 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0 . Q -værdien, beregnet ovenfor, er 4.77, så vi må forkaste hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q -værdien er indsat. Q -værdien ligger langt inde i det kritiske område



Alternativt kan den kritiske værdi bestemmes som 95%-fraktilen:

$$\text{invchi}(1, 0.95) = 3.84145606580278$$

Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for, at teststørrelsen Q faktisk antager værdien 4.77 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[4.77, \infty[$:

$$\int_Q^{\infty} \text{chipdf}(1, t) dt = 0.02890050139$$

Dvs., at der er ca 2.9% sandsynlighed for få et udfald af eksperimentet der er lige så 'skæv' eller 'skævere' end det vi har fået.

Alternativt kan p-værdien udregnes således:

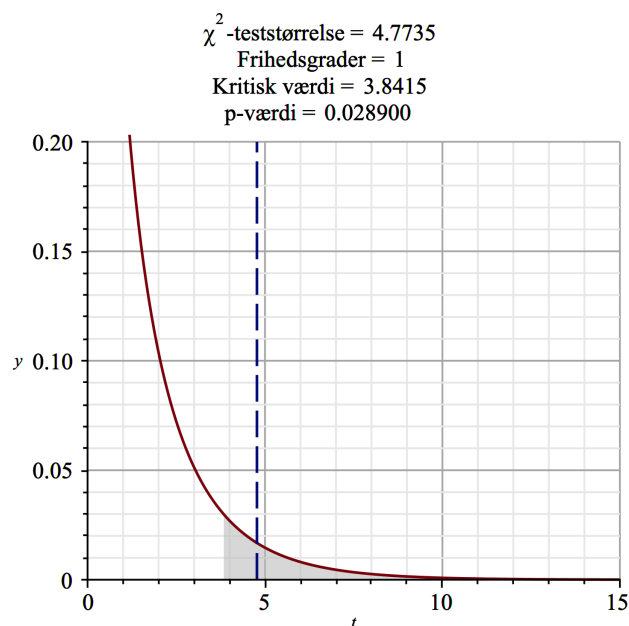
$$1 - \text{chicdf}(1, Q) = 0.0289004698658513$$

Automatisk test for uafhængighed

Gym-pakken indeholder en kommando, der automatiserer test for uafhængighed:

with(Gym) :

chi2Utest(obs, signifikansniveau = 0.05, size = [350, 350])



Værsgo. Her har du det hele.

11.3 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 2 (p7-11)

Flere niveauer på hvert af inddelingskriterierne

En hjerneforsker undersøger forskellige måder at operere for en bestemt form for hjernetumor. Der er tre forskellige operationstyper:

Type A, hvor man kun fjerner selve tumoren;

Type B, hvor man også tager lidt af det nærmeste omkringliggende væv bort, og

Type C, hvor såvel tumor som en større del af det omkringliggende væv fjernes.

Lægen ønsker at vide, hvordan operationstypen indvirker på chancen for at overleve et halvt år efter operationen. Over en årrække har lægen indsamlet følgende data over resultaterne af operationerne:

	I live	Død	I alt
Operation A	40	14	54
Operation B	10	6	16
Operation C	9	16	25
I alt	59	36	96

restart

with(Gym) :

Lev := [40, 10, 9] = [40, 10, 9]

Død := [14, 6, 16] = [14, 6, 16]

obs := *Matrix*([*Lev*, *Død*]) =
$$\begin{bmatrix} 40 & 10 & 9 \\ 14 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Vi skal her teste hypotesen

H_0 : Der er samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

mod alternativet

H_1 : Der er ikke samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

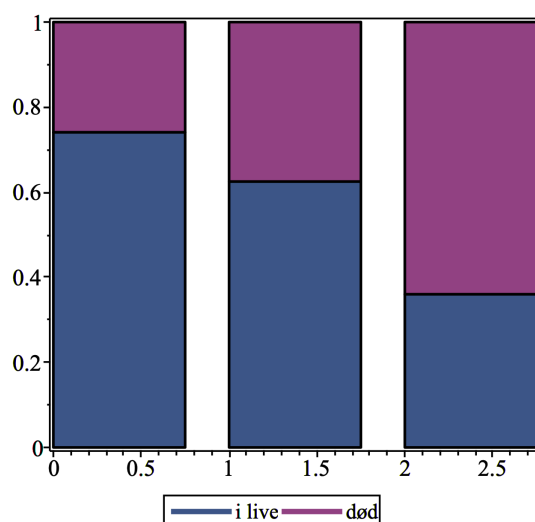
forv := *forventet*(*obs*)

$$\textit{forv} := \begin{bmatrix} 33.537 & 9.9368 & 15.526 \\ 20.463 & 6.0632 & 9.4737 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Stakkede søjlediagrammer kan tegnes:

with(Statistics) :

ColumnGraph ([Lev, Død], legend = ["i live", "død"], scale = relative, format = stacked)



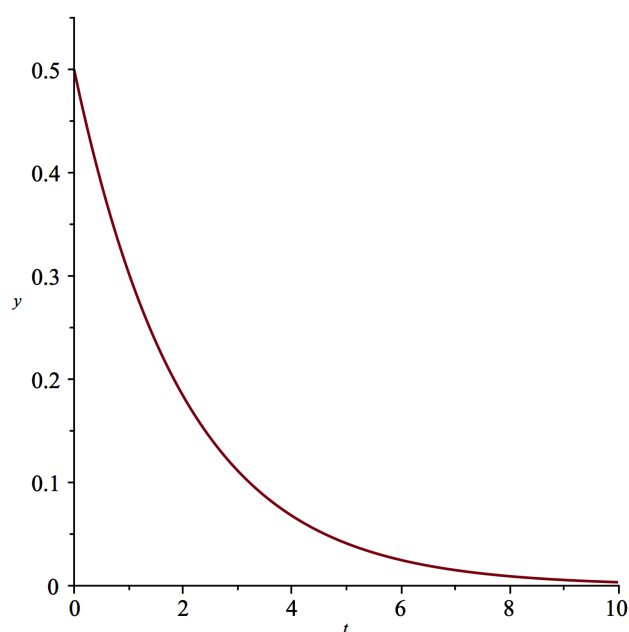
χ^2 -teststørrelsen Q udregnes:

$Q := \text{chi2Teststørrelse}(\text{obs})$

$$Q := 10.52714567$$

(11.6)

Teststørrelsen Q er her χ^2 -fordelt med 2 frihedsgrader. Sandsynlighedsfordelingen ser sådan ud:
 $\text{plot}(\text{chipdf}(2, t), t = 0 \dots 10, y = 0 \dots 0.55)$



Test på niveau 5%:

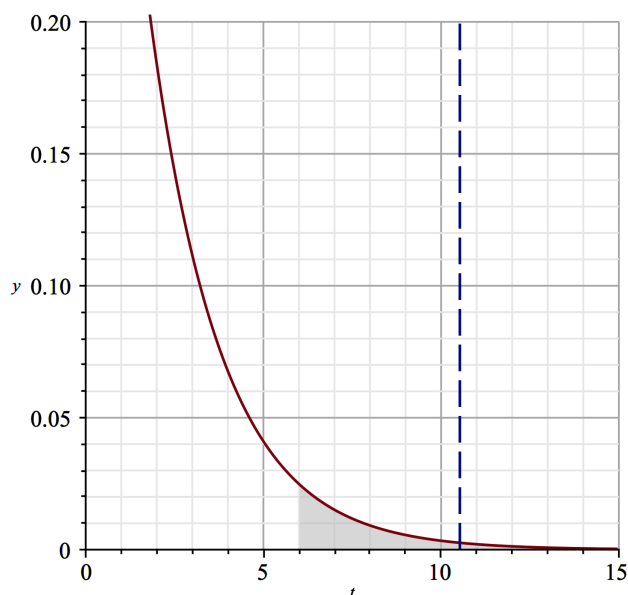
$\text{niveau} := 0.05 :$

For at finde den kritiske værdi skal vi have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$\text{KritiskVærdi} := \text{fsolve}\left(\int_k^\infty \text{chipdf}(2, t) \, dt = \text{niveau}, k\right) = 5.991464547$$

En værdi af Q større end 5.99 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0 . Q -værdien, beregnet ovenfor, er 10.5, så vi må forkaste hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q -værdien er indsat. Q -værdien ligger langt inde i det kritiske område:



Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 10.5 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[10.5, \infty[$:

$$\int_Q^{\infty} \text{chipdf}(2, t) \, dt = 0.005176775872$$

Dvs., at der er ca 0.5% sandsynlighed for at få et udfald af eksperimentet der er lige så 'skæv' eller skævere end det vi har fået.

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan også bestemmes således:

$$\text{invchi}(2, 0.95) = 5.99146454710798$$

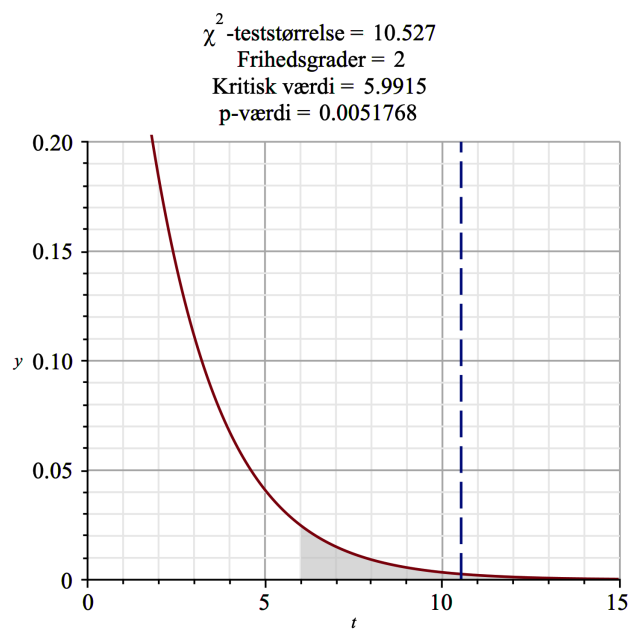
og p-værdien sådan her:

$$1 - \text{chicdf}(2, Q) = 0.00517677587213661$$

Automatisk test for uafhængighed

with(Gym) :

chi2Utest(obs, signifikansniveau = 0.05)



11.4 Statistisk test for uafhængighed mellem to inddelingskriterier 3 (p10)

Test for uafhængighed mellem overlevelse og operationsform for aldersgruppen over 50

(Fortsættelse af ovenstående eksempel)

Efter en nærmere inspektion af journalerne viser det sig, at også patientens alder er noteret, og ved at se på aldersgruppen over 50 år får vi disse observationer:

	I live	Død	I alt
Operation A	13	13	26
Operation B	8	6	14
Operation C	8	16	24
I alt	29	35	64

with(Gym) :

Lev := [13, 8, 8] = [13, 8, 8]

Død := [13, 6, 16] = [13, 6, 16]

obs := *Matrix*([*Lev*, *Død*]) =
$$\begin{bmatrix} 13 & 8 & 8 \\ 13 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

For aldersgruppen over 50 tester vi hypotesen

H_0 : Der er samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

mod alternativet

H_1 : Der er ikke samme sandsynlighed for overlevelse efter alle tre typer operation

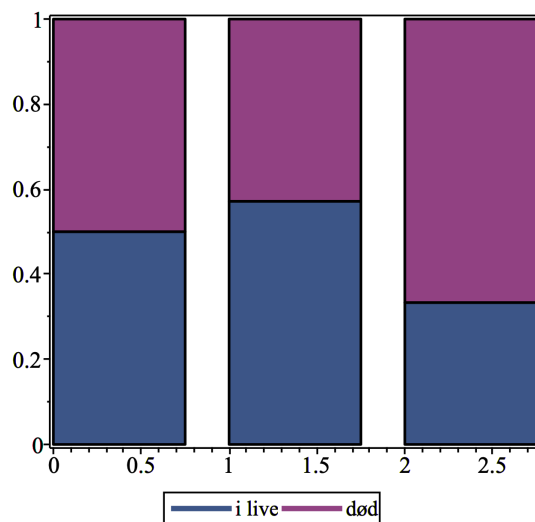
De forventede værdier under hypotesen H_0 udregnes

forv := *forventet*(*obs*) =
$$\begin{bmatrix} 11.781 & 6.3438 & 10.875 \\ 14.219 & 7.6562 & 13.125 \end{bmatrix}$$

Stakkede søjlediagrammer tegnes:

`with(Statistics) :`

`ColumnGraph ([Lev, Død], legend = ["i live", "død"], scale = relative, format = stacked)`



χ^2 -teststørrelsen udregnes:

`Q := chi2Teststørrelse (obs)`

$$Q := 2.411072015$$

(11.7)

Teststørrelsen Q er χ^2 -fordelt med 2 frihedsgrader

Test på niveau 5%:

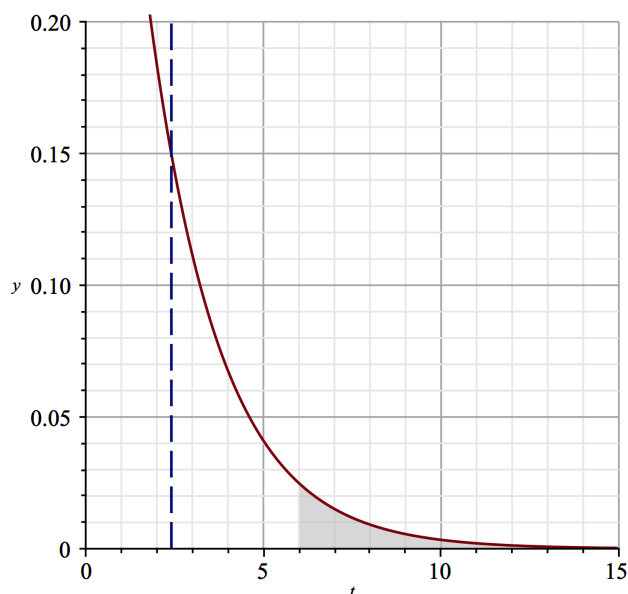
`niveau := 0.05 :`

For at finde den kritiske værdi skal vi have bestemt 5%-halen til højre. Hertil løser vi

$$KritiskVærdi := fsolve \left(\int_k^{\infty} chipdf(2, t) dt = niveau, k \right) = 5.991464547$$

En værdi af Q større end 5.99 vil føre til en forkastelse af hypotesen H_0 . Q -værdien, beregnet ovenfor, er 2.41, så vi kan ikke forkaste hypotesen på niveau 5%.

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat. Q-værdien ligger langt inde i acceptområdet:



Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 2.41 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under kurven ovenfor i intervallet $[2.41, \infty[$:

$$\int_Q^{\infty} \text{chipdf}(2, t) dt = 0.2995314054$$

Dvs., at der er ca 30% sandsynlighed for at få et udfald af eksperimentet der er lige så 'skæv' eller skævere end det vi har fået.

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan bestemmes således:

$$\text{invchi}(2, 0.95) = 5.99146454710798$$

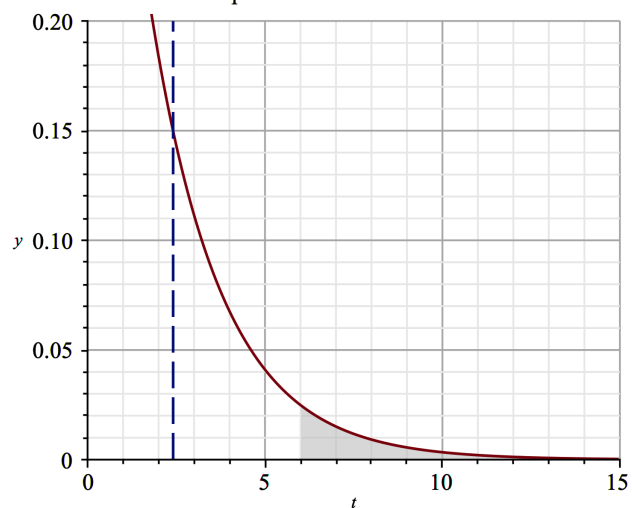
og p-værdien sådan her:

$$1 - \text{chicdf}(2, Q) = 0.299531407076303$$

Automatisk test for uafhængighed

`chi2Utest(obs, signifikansniveau = 0.05)`

χ^2 -teststørrelse = 2.4111
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.29953



11.5 Test for Goodness of Fit (p12-14)

Test for Goodness of Fit

Danmarks statistiks opgørelse af indkomstfordelingen for personer over 15 år i Danmark år 2007 viser følgende billede:

I indkomst i 1000 kr.	$I < 50$	$50 \leq I < 100$	$100 \leq I < 150$	$150 \leq I < 200$	$200 \leq I < 300$	$300 \leq I < 400$	$400 \leq I < 500$	$500 \leq I$
% af befolkningen	6.4	9.3	17.8	12.3	24.3	18.0	6.6	5.3

En markedsanalytiker har foretaget en undersøgelse af 1000 personers kendskab til et særdeles kostbart fladskærmsprodukt, men efterfølgende er der opstået tvivl om udvælgelsen af stikprøven, der er forgået som interviewundersøgelse over et par dage i et lokalt supermarked.

Det frygtes, at stikprøven har fået for mange respondenter med i de lavere indkomstklasser. Heldigvis er der blevet spurgt om folks indkomst, så man kan lave et test for, om indkomstfordelingen i stikprøven synes at komme fra et specielt segment af befolkningen og altså dermed ikke at have den samme fordeling som indkomstfordelingen i Danmark. Hvis det er tilfældet, kan man nemlig ikke generalisere undersøgelsens resultat til hele befolkningen.

Indkomstfordelingen i stikprøven var:

Observerede antal:

I indkomst i 1000 kr.	$I < 50$	$50 \leq I < 100$	$100 \leq I < 150$	$150 \leq I < 200$	$200 \leq I < 300$	$300 \leq I < 400$	$400 \leq I < 500$	$500 \leq I$
Antal i stikprøven	98	88	199	136	210	179	52	38

restart

with(Gym) :

Observerede data indtastes i en liste:

$obs := [98, 88, 199, 136, 210, 179, 52, 38]$

$obs := [98, 88, 199, 136, 210, 179, 52, 38]$ (11.8)

Vi skal her teste hypotesen

H_0 : Indkomstfordelingen i stikprøven adskiller sig ikke signifikant fra indkomstfordelingen i populationen.

mod alternativet

H_1 : Indkomstfordelingen i stikprøven er signifikant anderledes end indkomstfordelingen i populationen.

De forventede værdier under forudsætning af H_0 er procenterne fra Danmarks Statistik ganget med 1000:

$forv := [0.064, 0.093, 0.178, 0.123, 0.243, 0.180, 0.066, 0.053] \cdot 1000$

$forv := [64.000, 93.000, 178.000, 123.000, 243.000, 180.000, 66.000, 53.000]$ (11.9)

χ^2 -teststørrelsen udregnes

$Q := \text{chi2Teststørrelse}(obs, forv)$

$Q := 33.88484606$ (11.10)

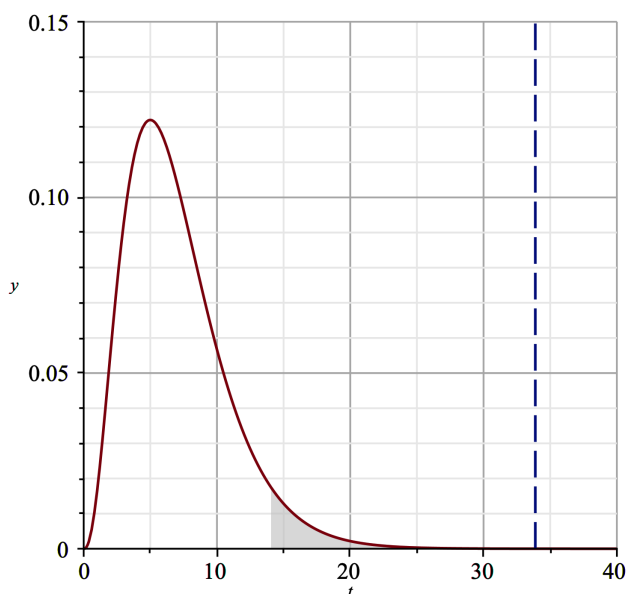
Q er χ^2 -fordelt med $f := 8 - 1 = 7$ frihedsgrader.

Test på niveau 5%:

$niveau := 0.05$:

$$KritiskVærdi := fsolve\left(\int_k^{\infty} chipdf(7, t) dt = niveau, k\right) = 14.06714045$$

Nedenfor er 5%-halen skraveret og Q-værdien er indsat i sandsynlighedsfordelingen for χ^2 -fordelingen med 7 frihedsgrader.



(11.11)

Da Q-værdien ligger langt til højre for den kritiske værdi, må vi forkaste hypotesen.

Bestemmelse af p-værdien (ved niveau 5%)

p-værdien er sandsynligheden for teststørrelsen Q faktisk antager værdien 10.5 eller derover. Det kan bestemmes som arealet under

$$\text{kurven ovenfor i intervallet } [Q, \infty[: \int_Q^{\infty} chipdf(7, t) dt = 0.00001810060720$$

Bemærkning:

Den kritiske værdi kan bestemmes således:

$$invchi(7, 0.95) = 14.0671405764057$$

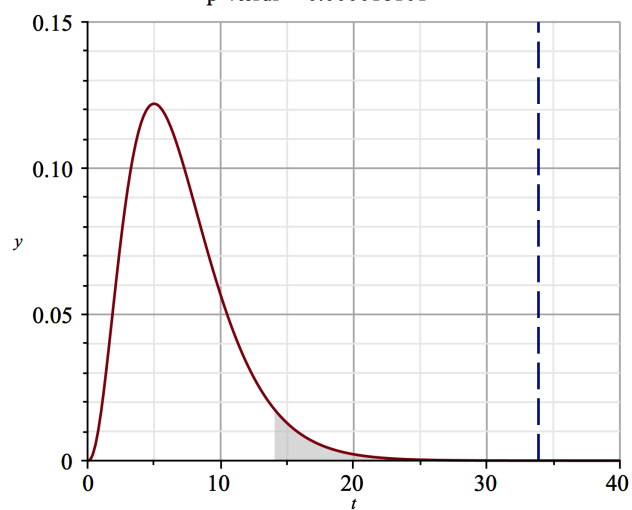
og p-værdien sådan her:

$$1 - chicdf(7, Q) = 0.0000181006072422774$$

Automatisk test for Goodness of Fit

`chi2GOFtest(obs, forv, signifikansniveau = 0.05, view = [0 ..40, 0 ..0.15 ])`

χ^2 -teststørrelse = 33.885
 Frihedsgrader = 7
 Kritisk værdi = 14.067
 p-værdi = 0.000018101



Her bliver teststørrelsen ikke automatisk vist, da den ligger udenfor det interval der som standard plottes i. Derfor er plotvinduet udvidet til `[0 ..40, 0 ..0.15 ]` i kommandoen.

12 Chi2 Uafhængighedstest - Simulation

12.1 Intro

I dette afsnit skal vi se på simulation af 0-hypotesen i en χ^2 -uafhængighedstest. Det sker ved, at vi sammenligner den teststørrelse, der er beregnet ud fra de virkelige data, med teststørrelser for en række fiktive (simulerede) resultater.

Vi skal fx se på undersøgelse, hvor man vil undersøge, om mænd og kvinder har den samme holdning til et spørgsmål, hvor holdningen angives i en række svarkategorier. Skal vi teste, om der er uafhængighed mellem køn og holdning til spørgsmålet, antager vi, at der er uafhængighed.

Med antagelsen om uafhængighed, er det sådan set ligegyldigt, om det er en mand eller en kvinde, der har svaret på en bestemt måde. Det betyder, at vi kan tillade os at *blande* svarene vedrørende holdning og dele dem tilfældigt ud til mænd og kvinder på ny – dog således, at der ikke ændres på noget som helst vedrørende antallet af mænd og kvinder i undersøgelsen og antallene i de forskellige svarkategorier. På den måde skaber vi et nyt resultat af undersøgelsen, men det nye resultat er et resultat, vi lige så vel kunne have fået af den oprindelige undersøgelse, hvis der vel at mærke er uafhængighed mellem køn og holdning.

For hvert nyt resultat, vi simulerer, udregner vi, hvor meget det nye resultat afviger fra det forventede resultat – altså teststørrelsen Q . Ved at simulere tilpas mange gange og se på fordelingen af værdierne af Q , kan vi vurdere, hvor skævt det virkelige udfald af undersøgelsen er i forhold til de mange fiktive (men mulige) udfald, vi har simuleret.

12.2 Mediemonitor

Et kommunikationsbureau gennemførte i 2006 undersøgelsen Mediemonitor.

I undersøgelsen blev 1000 personer bl.a. spurgt om hvilket medie, der var deres foretrukne adgang til nyheder.

Nedenstående tabel viser et udsnit af data

	Køn	2
1	"Mand"	"Radio eller TV"
2	"Mand"	"Radio eller TV"
3	"Kvinde"	"Aviser eller blade"
4	"Mand"	"Internet eller mobil"
5	"Kvinde"	"Radio eller TV"
6	"Kvinde"	"Radio eller TV"
7	"Mand"	"Radio eller TV"
8	"Mand"	"Aviser eller blade"
9	"Mand"	"Radio eller TV"
10	"Kvinde"	"Radio eller TV"

Vi starter med at optælle data i en antalstabel:

with(Gym) :

$A := \text{antalstabel}(M)$

$$A := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Aviser eller blade"} & \text{"Internet eller mobil"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 171 & 103 & 369 & 643 \\ \text{"Mand"} & 97 & 80 & 180 & 357 \\ \text{"i alt"} & 268 & 183 & 549 & 1000 \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

Vi vil teste nulhypotesen:

H_0 : Der er uafhængighed mellem køn og det medie, der foretrækkes.

Dvs., at sandsynligheden for, at "Aviser eller blade" er det foretrukne medie, er den samme, uanset om det er en kvinde eller en mand, vi spørger. Det samme gør sig gældende for de andre kategorier.

Ved udregning af de forventede værdier under forudsætning af, at H_0 holder, kan vi derfor gå ud fra, at fordelingen mellem mænd og kvinder i "Aviser eller blade" kolonnen skal være den samme som i "i alt" kolonnen. Dvs., af de 268, der har "Aviser eller blade" som foretrukket medie, er 64.3% kvinder og 35.7% mænd. Det samme gør sig gældende i de øvrige kolonner.

Forventet	Aviser eller blade	Internet eller mobil	Radio eller TV	i alt
Kvinde	$268 \cdot 0.643 = 172.324$	$183 \cdot 0.643 = 117.669$	$549 \cdot 0.643 = 353.007$	643
Mand	$268 \cdot 0.357 = 95.676$	$183 \cdot 0.357 = 65.331$	$549 \cdot 0.357 = 195.993$	357
i alt	268	183	549	1000

Med Gym-pakken kan de forventede værdier udregnes i en snæver vending:

$F := \text{forventet}(A)$

$$F := \begin{bmatrix} \text{"Forventet"} & \text{"Aviser eller blade"} & \text{"Internet eller mobil"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 172.32 & 117.67 & 353.01 & 643 \\ \text{"Mand"} & 95.676 & 65.331 & 195.99 & 357 \\ \text{"i alt"} & 268 & 183 & 549 & 1000 \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

Herefter udregner vi teststørrelsen Q , der er et mål for, hvor meget de observerede værdier afviger fra de forventede værdier.

$$Q := \frac{(171 - 172.32)^2}{172.3} + \frac{(103 - 117.67)^2}{117.7} + \frac{(369 - 353.01)^2}{353.0} + \frac{(97 - 95.676)^2}{95.7}$$

$$Q := 7.180925344 \quad (12.3)$$

Eller blot med kommandoen (at værdierne ikke stemmer helt overens skyldes de forventede værdier er afrundede)

$Q := \text{chi2Teststørrelse}(A) = 7.180452246$

Simulation af nulhypotesen

Spørgsmålet er, om denne afvigelse er for stor til at vi vil tro på nulhypotesen – eller om den bryder med nulhypotesen, så vi er nødt til at forkaste denne. Udfaldet af undersøgelsen kunne jo have været på mangfoldige andre måder med andre værdier af Q til følge.

0-hypotesen udtrykker, at der er uafhængighed mellem køn og det medie, der foretrækkes. Hvis det er sandt, så er det ligegyldigt, i hvilken rækkefølge svarene i matricen M optræder – dvs., at vi kan *blande* svarene i anden kolonne af M .

Vi ser på et lille udsnit af matricen M

"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Internet eller mobil"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"

Matricen opdeles i to:

"Mand"
"Mand"
"Kvinde"
"Mand"
"Kvinde"
"Kvinde"
"Mand"
"Mand"
"Mand"
"Kvinde"

"Radio eller TV"
"Radio eller TV"
"Aviser eller blade"
"Internet eller mobil"
"Radio eller TV"
"Radio eller TV"
"Radio eller TV"
"Aviser eller blade"
"Radio eller TV"
"Radio eller TV"

svarene blandes (kun de 10 svar blandes her)

"Mand"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Internet eller mobil"
"Kvinde"	"Radio eller TV"

og de to vektorer sættes sammen til en matrix

"Mand"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Radio eller TV"
"Kvinde"	"Aviser eller blade"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Radio eller TV"
"Mand"	"Internet eller mobil"
"Kvinde"	"Radio eller TV"

Så under forudsætningen om uafhængighed af køn, kan den blandede matrix lige så vel have været resultatet af undersøgelsen som det resultat, vi har fået. En eventuel sammenhæng mellem køn og foretrukket medie vil effektivt blive brudt ved denne blanding.

Hvis vi tilsvarende blander alle 1000 svar i anden kolonne af M , vil have et nyt (fiktivt) resultat af undersøgelsen, der opfylder, at fordelingen af mænd og kvinder er uændret – vi har jo slet ikke rørt første kolonne.

Antallet i hver af de 3 kategorier "Aviser eller blade", "Internet eller mobil" og "Radio eller TV" er også uændrede – vi har jo blot blandet svarene i anden kolonne. Det svarer helt til blanding af spillekort, hvor antallet af hjerter, ruder, klør og spar jo er det samme efter blandingen, men den orden, kortene ligger i, er ændret.

Vi kan altså bruge denne blanding til en simulering af 0-hypotesen.

Værktøj til blanding

Nedenfor er programmeret en funktion, der som input tager en $n \times 2$ -matrix (altså n rækker og 2 søjler) og et k , der angiver, hvilken søjle der skal blandes (altså: k kan have værdien 1 eller 2). Det er ikke vigtigt, at du forstår programmet, det er nok, du ved, hvad det gør.

Desuden er der programmeret en funktion, der udregner teststørrelsen Q for en antalstabel.

For at aktivere funktionerne, skal du blot klikke i programmet og taste Enter

```

shuffleCol := proc(M, n)
local M1, M2;
M1 := LinearAlgebra[Column](M, 1);
M2 := LinearAlgebra[Column](M, 2);
if n = 1 then
  <Statistics[Shuffle](M1)|M2>
else
  <M1|Statistics[Shuffle](M2)>
fi
end proc:

```

Lad os prøve at blande 2. kolonne i M

```
Ms := shuffleCol(M, 2)
```

$M_s :=$

"Mand"	"Aviser eller b
"Mand"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Mand"	"Aviser eller b
"Kvinde"	"Aviser eller b
"Kvinde"	"Radio eller'
"Mand"	"Internet eller r
"Mand"	"Radio eller'
"Mand"	"Internet eller r
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Aviser eller b
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Internet eller r
"Kvinde"	"Aviser eller b
"Mand"	"Aviser eller b
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Aviser eller b
"Kvinde"	"Aviser eller b
"Mand"	"Internet eller r
"Kvinde"	"Internet eller r
"Mand"	"Radio eller'
"Mand"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'
"Kvinde"	"Radio eller'

(12.4)

1000 × 2 Matrix

– og bestemme antalstabellen

$As := \text{antalstabel}(Ms)$

$$As := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Aviser eller blade"} & \text{"Internet eller mobil"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 181 & 111 & 351 & 643 \\ \text{"Mand"} & 87 & 72 & 198 & 357 \\ \text{"i alt"} & 268 & 183 & 549 & 1000 \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

Lad os sammenligne med antalstabellen for den virkelige undersøgelse

$\text{antalstabel}(M)$

$$\begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Aviser eller blade"} & \text{"Internet eller mobil"} & \text{"Radio eller TV"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 171 & 103 & 369 & 643 \\ \text{"Mand"} & 97 & 80 & 180 & 357 \\ \text{"i alt"} & 268 & 183 & 549 & 1000 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Vi kan selvfølgelig også regne Q -værdien ud for det simulerede resultat: $\text{chi2Teststørrelse}(As) = 2.314266684$

En noget mindre Q -værdi end vi fik for det virkelige resultat (ca. 7.18), men du kan sikkert også godt få noget, der er større.

Vi er ved at være klar til simuleringen. Vi definerer først en vektor Qs til opsamling af de Q -værdier, der beregnes efter hver simulering. Derefter simuleres 1000 gange, antalstabeller dannes og Q -værdien beregnes:

$Qs := \text{Vector}(1000) :$

for k **from** 1 **to** 1000 **do**

$Ms := \text{shuffleCol}(M, 2) :$

$As := \text{antalstabel}(Ms) :$

$Qs[k] := \text{chi2Teststørrelse}(As)$

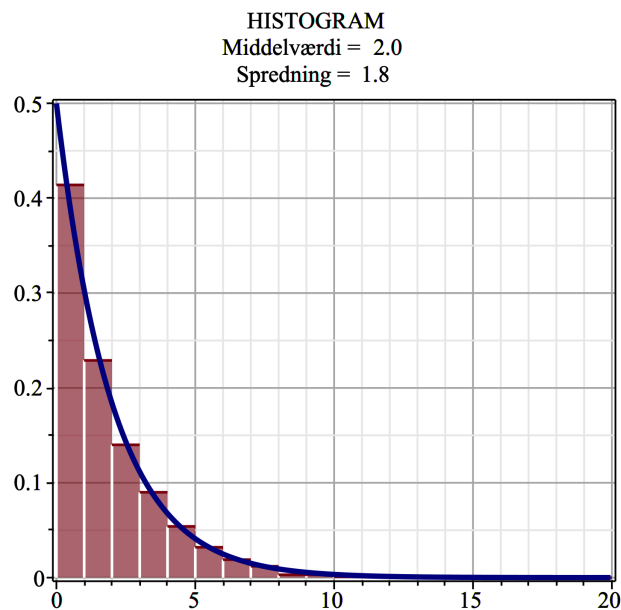
end do:

$\min(Qs) = 0.004314878762$

$\max(Qs) = 14.97451512$

$G := \text{grupperData}(Qs, 0..20, 20) :$

$\text{plots}[\text{display}](\text{plotHistogram}(G), \text{plot}(\text{chipdf}(2, x), x = 0..20, \text{color} = \text{"Navy"}, \text{thickness}$



Sammen med histogrammet er tegnet tæthedsfunktionen for en χ^2 -fordeling med 2 frihedsgrader. Denne ses at matche fint med histogrammet. Vi kan også se, at Q -værdien for den oprindelige undersøgelse, altså 7.18, ligger ret yderligt i histogrammet. Vi kan regne ud, om det er for yderligt, ved at bestemme den kritiske værdi:

$$\int_K^{\infty} \text{chipdf}(2, x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 5.991464547$$

Så med et signifikansniveau på 5% må vi forkaste hypotesen om uafhængighed af køn.

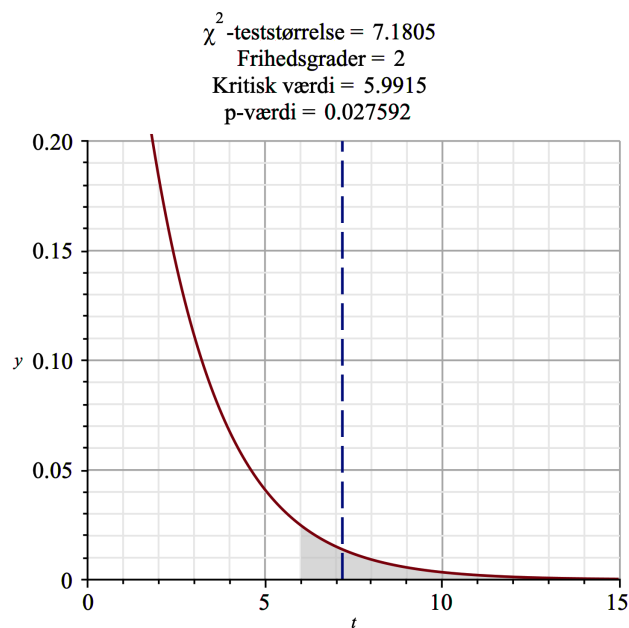
Et oplagt spørgsmål er: Hvad sker der, hvis vi i stedet blander den første kolonne? Ingenting!

Vi vil nok se en lidt ændret fordeling af Q -værdierne, men ikke andet, end at du kunne have opnået det samme ved at blande anden kolonne. Du kan meget nemt overbevise dig om dette, ved at gentage ovenstående simulation, hvor du blot skal ændre 2-tallet til et 1-tal i $Ms := \text{shuffleCol}(M, 2)$.

Løsning med Gym-pakken

Med Gym-pakken er opgaven løst med en enkelt kommando. Du behøver ikke her – som ved Test for Goodness of Fit – at beregne de forventede værdier først, det sker helt automatisk.

`chi2Utest(A)`



Hypotesen om uafhængighed af køn kan forkastes på signifikansniveau 5%

12.3 Salg af kartofler

En forretningskæde vil undersøge, om farven på indpakningen af nye kartofler påvirker salget. Butikken sælger derfor i en periode poser med samme slags kartofler, alle med 2.5 kg/pose og til samme pris, men i poser med forskellig farve.

Undersøgelsen resulterede denne fordeling af solgte/ikke-solgte poser i farverne blå og gul (det observerede):

	solgt	ikke solgt	I alt
Blå	145	25	170
Gul	375	55	430
I alt	520	80	600

Vi vil undersøge om farven på posen påvirker salget.

Hertil formulerer vi først en nulhypotese:

H_0 : Der ikke er forskel på, om blå pose eller en gul pose sælges

som vi vil teste med signifikansniveau 5%.

Vi indtaster først tabellen ovenfor som en antaltabel (hvor der **skal** stå "Observeret" i øverste højre hjørne):

$$A1 := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"solgt"} & \text{"ikke-solgt"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Blå"} & 145 & 25 & 170 \\ \text{"Gul"} & 375 & 55 & 430 \\ \text{"i alt"} & 520 & 80 & 600 \end{bmatrix} :$$

og regner de forventede værdier ud

$$F1 := \text{forventet}(A1)$$

$$F1 := \begin{bmatrix} \text{"Forventet"} & \text{"solgt"} & \text{"ikke-solgt"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Blå"} & 147.33 & 22.667 & 170 \\ \text{"Gul"} & 372.67 & 57.333 & 430 \\ \text{"i alt"} & 520 & 80 & 600 \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

Vi regne teststørrelsen Q ud med formlen:

$$\text{chi2Teststørrelse}(A1) = 0.3867199808$$

I dette eksempel har vi ikke de rå data til rådighed, men kun en antaltabel, så vi har ikke noget at blande. Det, vi skal bruge, er en tabel med 600 rækker, der ser ud i stil med:

$$\begin{bmatrix} \text{"Gul"} & \text{"solgt"} \\ \text{"Gul"} & \text{"solgt"} \\ \text{"Blå"} & \text{"ikke solgt"} \\ \text{"Gul"} & \text{"solgt"} \\ \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \end{bmatrix}$$

Men vi kan dog nemt skabe en tabel, der *kunne* have været et udfald af eksperimentet, ved at danne de to kolonner sådan her:

$$\text{kolonne1} := \langle \text{"Blå"}\$170, \text{"Gul"}\$430 \rangle :$$

kolonne2 := $\langle \text{"solgt"}\$520, \text{"ikke-solgt"}\$80 \rangle :$

og sætte dem sammen til en tabel ved

M1 := $\langle \textit{kolonne1} | \textit{kolonne2} \rangle$

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 2 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 3 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 4 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 5 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 6 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 7 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 8 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 9 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 10 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 11 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 12 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 13 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 14 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 15 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 16 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 17 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 18 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 19 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 20 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 21 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 22 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 23 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 24 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ 25 & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \\ & \text{"Blå"} & \text{"solgt"} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

600 × 2 Matrix

Nu er alt som i det foregående eksempel og vi kan blande solgt/ikke-solgt kolonnen. Sørg for, at du har funktionen `shuffleCol` fra forrige afsnit indlæst inden du starter blandingen.

I programmet er vi her nødt til at anføre den orden, vi ønsker at have rækker og kolonner i. Det var intet problem i det første eksempel, da både rækker og kolonner var ordnet alfabetisk. Det er de ikke her, så derfor skal den ønskede orden anføres som `["Blå", "Gul"]`, `["solgt", "ikke-solgt"]`, så de matcher antaltabelen ovenfor.

Q1s := `Vector(1000)` :

for *k* **from** 1 **to** 1000 **do**

M1s := `shuffleCol(M1, 2)` :

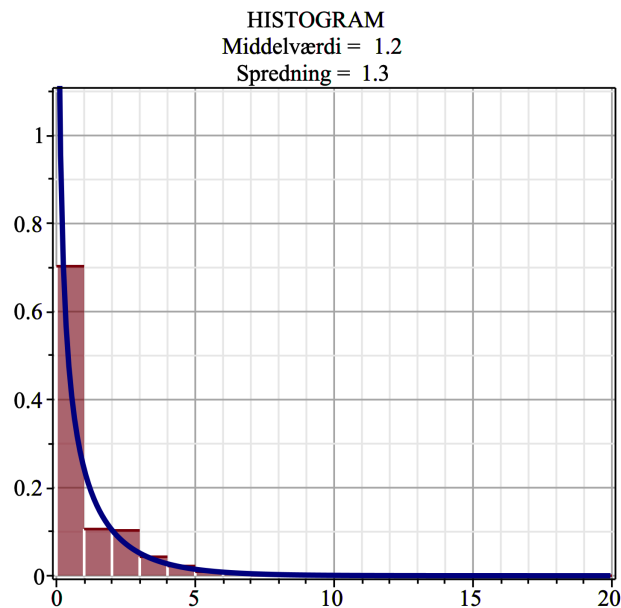
A1s := `antalstabel(M1s, ["Blå", "Gul"], ["solgt", "ikke-solgt"])` :

Q1s[*k*] := `chi2Teststørrelse(A1s)` :

end do:


```
G1 := grupperData (Q1s, 0 ..20, 20) :
```

```
plots[display](plotHistogram (G1), plot(chipdf (1, x), x = 0 ..20, color = "Navy", thickness
```



Sammen med histogrammet er tegnet tæthedsfunktionen for en χ^2 -fordeling med 1 frihedsgrad. Denne ses at matche fint med histogrammet. Vi kan også se, at Q -værdien for den oprindelige undersøgelse, altså 0.38, ligger i den første søjle i histogrammet, og ser derfor ud til at føre til accept af H_0 .

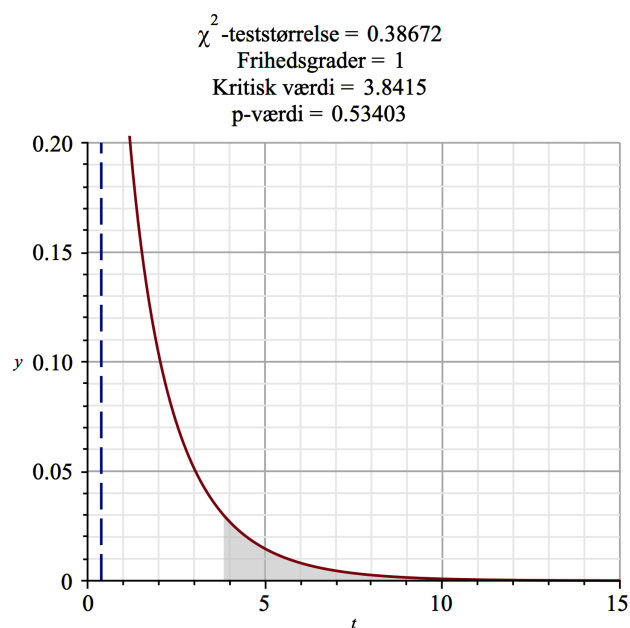
Lad os for en god ordens skyld beregne den kritiske værdi:

$$\int_K^{\infty} \text{chipdf}(1, x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 3.841458820$$

Så da Q -værdien er mindre end den kritiske værdi, forkaster vi ikke H_0 .

Løsning med Gym-pakken

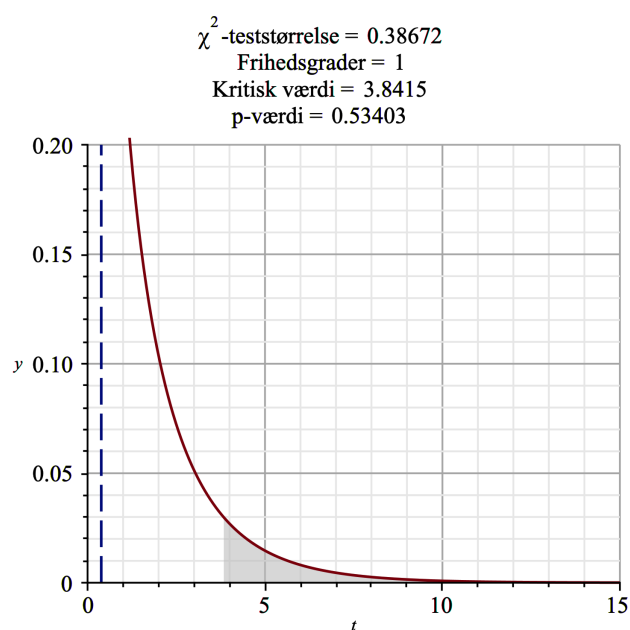
`chi2Utest(A1)`



Du behøver ikke at bruge en antaltabel her. Du kan nøjes med at indtaste matricen med observationerne

$$obs := \begin{bmatrix} 145 & 25 \\ 375 & 55 \end{bmatrix} :$$

`chi2Utest(obs)`



Så da Q -værdien er mindre end den kritiske værdi, forkaster vi ikke H_0 .

12.4 Spørgeskema

I forbindelse med en spørgeskemaundersøgelse har man opdelt svarene på køn og fået dette resultat (her indtastet i en antaltabel)

$$A2 := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Helt enig"} & \text{"Nærmest enig"} & \text{"Hverken/eller"} & \text{"Nærmest uenig"} & \text{"Helt uenig"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 12 & 37 & 22 & 14 & 9 & 94 \\ \text{"Mand"} & 24 & 46 & 20 & 6 & 5 & 101 \\ \text{"i alt"} & 36 & 83 & 42 & 20 & 14 & 195 \end{bmatrix}$$

Vi vil teste hypotesen

H_0 : Svaret er uafhængig af køn

på niveau 5%

Vi starter med at beregne de forventede værdier og teststørrelsen Q :

$F2 := \text{forventet}(A2)$

$$F2 := \begin{bmatrix} \text{"Forventet"} & \text{"Helt enig"} & \text{"Nærmest enig"} & \text{"Hverken/eller"} & \text{"Nærmest uenig"} & \text{"Helt uenig"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 17.354 & 40.010 & 20.246 & 9.6410 & 6.7487 & 94 \\ \text{"Mand"} & 18.646 & 42.990 & 21.754 & 10.359 & 7.2513 & 101 \\ \text{"i alt"} & 36 & 83 & 42 & 20 & 14 & 195 \end{bmatrix}$$

$\text{chi2Teststørrelse}(A2) = 9.174539345$

Simulationen her går efter samme melodi som tidligere. Vi laver en tabel med køn i første kolonne, holdning i anden kolonne og stykker de to kolonner sammen til en tabel:

$M2 := \langle \langle \text{"Kvinde"}\$94, \text{"Mand"}\$101 \rangle | \langle \text{"Helt enig"}\$36, \text{"Nærmest enig"}\$83, \text{"Hverken/eller"}\$42, \text{"Nærmest uenig"}\$20, \text{"Helt uenig"}\$14 \rangle \rangle :$

Vi blander den anden kolonne i $M2$ og udregner teststørrelsen Q efter hver blanding

$Q2s := \text{Vector}(1000) :$

for k from 1 to 1000 do

$M2s := \text{shuffleCol}(M2, 2) :$

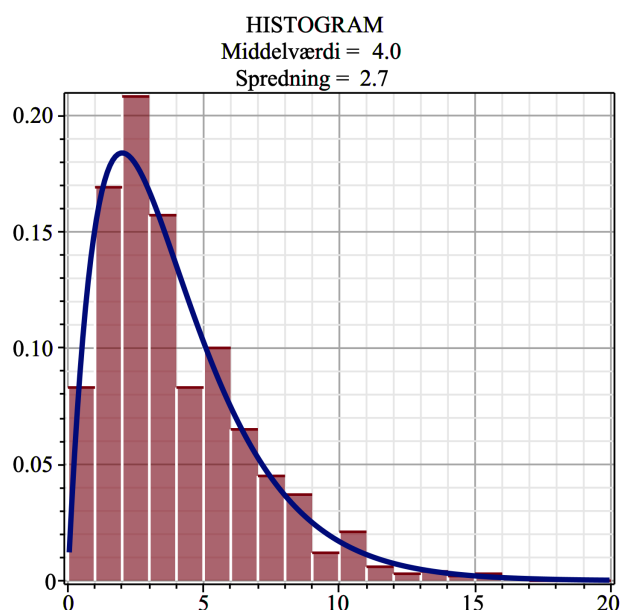
$A2s := \text{antaltabel}(M2s, [\text{"Kvinde"}, \text{"Mand"}], [\text{"Helt enig"}, \text{"Nærmest enig"}, \text{"Hverken/eller"}, \text{"Nærmest uenig"}, \text{"Helt uenig"}]) :$

$Q2s[k] := \text{chi2Teststørrelse}(A2s)$

end do:

```
G2 := grupperData (Q2s, 0 ..20, 20) :
```

```
plots[display](plotHistogram (G2), plot(chipdf (4, x), x = 0 ..20, color = Navy"))
```



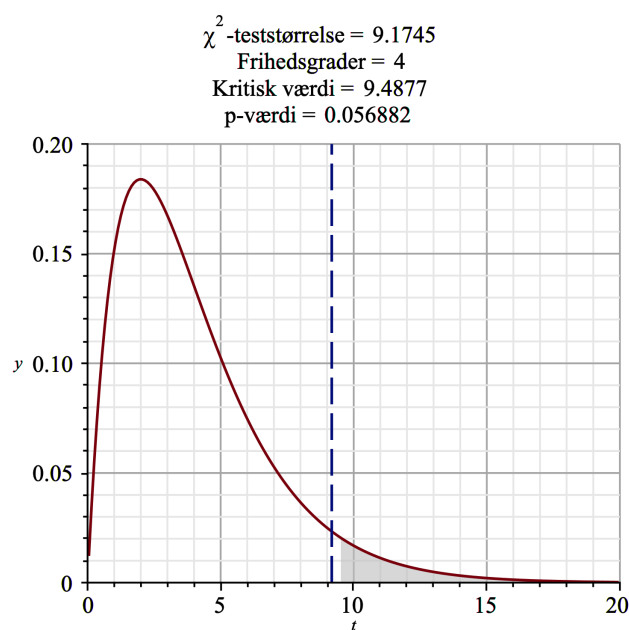
Her ser vi et næsten perfekt match med en χ^2 -fordeling med 4 frihedsgrader. Lad os bestemme den kritiske værdi

$$\int_K^{\infty} \text{chipdf}(4, x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 9.487729037$$

Så da Q -værdien er mindre end den kritiske værdi, forkaster vi ikke H_0 .

Løsning med Gym-pakken

```
chi2Utest (A2, size = [350, 350])
```



Så da χ^2 -teststørrelsen er mindre end den kritiske værdi, forkaster vi ikke H_0 .

12.5 Chi2Sim

Alt, hvad vi har lavet af simulation i de foregående 3 eksempler, er implementeret i en enkelt kommando i Gym pakken. Lad os se, hvordan det virker med Spørgeskema eksemplet

I forbindelse med en spørgeskemaundersøgelse har man opdelt svarene på køn og fået dette resultat (her indtastet i en antaltabel)

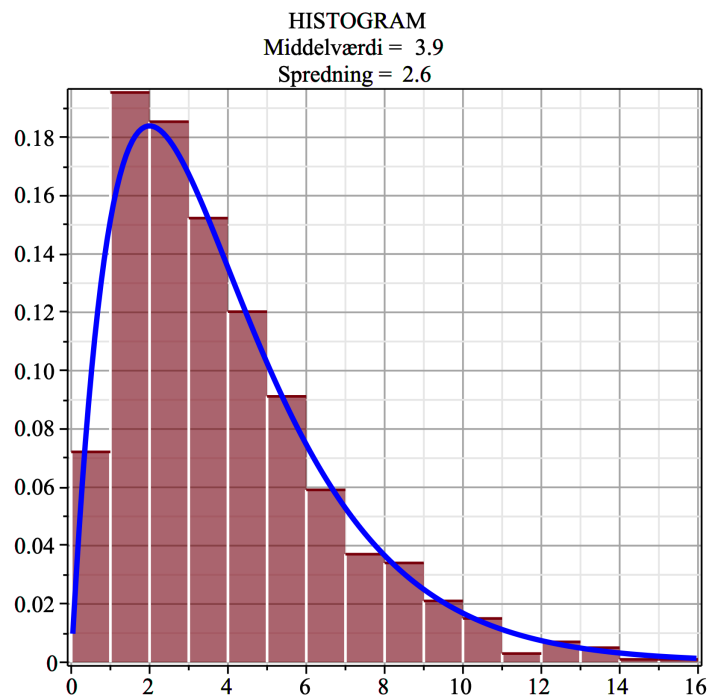
$$A2 := \begin{bmatrix} \text{"Observeret"} & \text{"Helt enig"} & \text{"Nærmest enig"} & \text{"Hverken/eller"} & \text{"Nærmest uenig"} & \text{"Helt uenig"} & \text{"i alt"} \\ \text{"Kvinde"} & 12 & 37 & 22 & 14 & 9 & 94 \\ \text{"Mand"} & 24 & 46 & 20 & 6 & 5 & 101 \\ \text{"i alt"} & 36 & 83 & 42 & 20 & 14 & 195 \end{bmatrix}$$

Vi vil teste hypotesen

H_0 : Svaret er uafhængig af køn

with(Gym) :

chi2Sim(A2, 1000)



12.6 Frihedsgrader

Lad os se lidt nærmere på antallet af frihedsgrader i de 3 test, vi har lavet i dette afsnit. Antallet af frihedsgrader afhænger af den reducerede matrix – dvs. den matrix, der fremkommer ved at fjerne rækkerne og søjler med tekst og med totalerne.

I det første eksempel har vi en datamatrix med 2 rækker og 3 søjler. Her viste eksempler, at der er 2 frihedsgrader.

Vi laver en lille tabel:

Eksempel	rækker	søjler	frihedsgrader
Mediemonitor	2	3	2
Kartoffelposer	2	2	1
Spørgeskema	2	5	4

Der gælder formelen $f = (r - 1) \cdot (s - 1)$, hvor f er antallet af frihedsgrader, r er antallet af rækker og s er antallet af søjler. Skal vi overbevise os om, at dette er korrekt, så lad os se på en lidt større matrix:

	1	2	3	4	5	i alt
1	$t_{1,1}$					rs_1
2	$t_{2,1}$					rs_2
3						rs_3
i alt	ss_1	ss_2	ss_3	ss_4	ss_5	

Kender vi værdierne $t_{1,1}$ og $t_{2,1}$ i 1. søjle, så kan vi beregne den sidste ved hjælp af søjlesummen ss_1 , som $ss_1 = t_{1,1} + t_{2,1}$. Og helt tilsvarende i de næste 3 søjler.

Søjlesummerne giver altså en binding på de værdier, der kan stå i søjlen.

Kender vi således disse værdier

	1	2	3	4	5	i alt
1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$t_{1,3}$	$t_{1,4}$		rs_1
2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$t_{2,3}$	$t_{2,4}$		rs_2
3						rs_3
i alt	ss_1	ss_2	ss_3	ss_4	ss_5	

så er hele tabellen fastlagt, idet såvel rækkesummer som søjlesummer jo skal passe. Så alle rækkesummer giver en binding på de værdier, der kan stå i rækken.

Vi kan variere tallene i skemaet ovenfor – dog ikke vilkårligt, men inden for visse grænser, idet rækkesummer og søjlesummer stadig skal passe. Det, at der i alt er 8 tal i skemaet, der kan varieres, betyder netop, at der er 8 frihedsgrader.

Et helt tilsvarende argument kan bruges i en vilkårlig $r \times s$ - matrix. Det nemmeste vil være at udfylde efter retningslinjerne ovenfor, så du udfylder alt, på nær række nr. r og søjle nr. s . Herved vil du udfylde $(r - 1) \cdot (s - 1)$ felter. Tallene i disse felter kan du variere og lade række- og søjlesummerne fastlægge indholdet af de ikke-udfyldte felter.

Altså vil der her være højst $f = (r - 1) \cdot (s - 1)$ frihedsgrader.

Fjerner du indholdet i ét af felterne, fx $t_{1,1}$, vil du have en søjle og en række med to ikke-udfyldte felter, hvoraf ét af felterne er fælles. Hvis du på baggrund af række- og søjlesummer skal fastlægge indholdet af disse, vil det føre til løsning af et system af to ligninger med tre ubekendte. Ligningssystemet vil være af formen

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \end{cases}$$

hvor x er indholdet i det fælles ikke-udfyldte felt, y og z indholdet i de to andre ikke-udfyldte felter, a og b er kendte tal.

Ligningssystemet vil have uendelig mange løsninger, der fås ved at vælge x vilkårligt og bestemme y og z ved de to ligninger.

Dette viser, at det ikke kan gøres mindre end $(r - 1) \cdot (s - 1)$ frihedsgrader.

13 Chi2 test for Goodness of Fit - Simulation

13.1 Intro

I dette afsnit introduceres hypotesetest og begreberne i tilknytning hertil. I stedet for at gå direkte til en teoretisk behandling, sammenligner vi det udfald af et eksperiment, vi har fået, med en masse andre udfald, vi lige så vel kunne have fået, hvis den hypotese, vi tester, er sand.

Vi benytter Maple til at generere de forsøgsresultater, vi kunne have fået. Det sker ved at beregne nogle programstumper, der *er* lavet, og det er ikke meningen, at du skal forstå alle detaljer i disse – men blot se på resultaterne og sammenligne disse med vores observationer.

Vi slutter afsnittet af med at vise, hvordan alle tests nemt klares med Gym-pakken, men de eksempler, der gennemgås via simulationer, er vigtige for forståelsen af, hvad der sker i de mere eller mindre automatiserede beregninger med Gym-pakken.

13.2 Simulation af nulhypotesen

Vi tager udgangspunkt i denne opgave:

Du har en mistanke om, at en af dine venner har en ”falsk” terning.

Derfor har du i al hemmelighed noteret udfaldet af alle vedkommendes kast med terningen gennem en hel aftens spil.

Dine optegnelser er samlet i denne tabel:

udfald	1	2	3	4	5	6
antal	5	4	5	6	5	13

Giver dine observationer anledning til at din mistanke bestyrkes?

Umiddelbart ser antallet af 6'ere voldsomt stort ud og det kunne tyde på, at der er snyd i terningen. Når vi mener, at der kan være snydt med terningen, er det naturligvis fordi vi forventer at få nogenlunde lige mange udfald af hver slags, hvis terningen er ægte (eller symmetrisk).

For at undersøge observationerne nærmere og konkretisere vores forventning til udfaldene, formulerer vi en såkaldt **0-hypotese**:

H_0 : Terningen er ægte

I vore undersøgelser vil vi antage, at H_0 holder – dvs., at vi har med en ægte terning at gøre og at variationerne i antallet af udfaldene skal tilskrives tilfældigheder. Dette udtrykkes ofte ved, at der ikke er nogen **signifikant** forskel på det forventede antal og det faktisk observerede antal udfald af hver slags. Med ordet 'signifikant' menes 'statistisk påviselig'

Under forudsætning af, at H_0 holder, vil det forventede antal for alle udfald altså være $\frac{38}{6} = 6.33$:

udfald	1	2	3	4	5	6
forventet antal	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33

Sammenligner vi de observerede værdier med de forventede, ser vi, at antallet af 6'ere afviger meget, mens de øvrige udfald nok afviger, men ikke nær så meget – dog er de alle mindre end de forventede værdier, hvilket tyder på, at terningen har en tendens til at give 6'ere på bekostning af alle de øvrige udfald.

Er den afvigelse, vi ser, stor eller lille? Det kan vi kun sige noget om, hvis vi har en standard for afvigelsen at sammenligne med. Vi skal på en eller anden måde have opdelt de mulige afvigelser i to kategorier: De **acceptable** afvigelser, der må tilskrives tilfældigheder, og de **kritiske** afvigelser, der vil være så usædvanlige, at vi kommer til at tvivle på, hvorvidt 0-hypotesen virkelig holder.

Opdelingen af de mulige afvigelser i acceptable og kritiske afvigelser, har intet med de konkrete observationer at gøre, men afhænger alene af 0-hypotesen. På basis af 0-hypotesen skal vi altså bestemme, hvordan afvigelserne er fordelt og dermed kunne beregne, hvor sandsynlig en afvigelse er under forudsætning af 0-hypotesen.

Mål for afvigelsen

Som et mål for, hvor langt de observerede værdier ligger fra de forventede værdier, kan vi i første omgang forsøge os med summen af afvigelserne

$$\sum_{i=1}^6 (\text{observeret}_i - \text{forventet}_i) = (6.33 - 5) + (6.33 - 4) + (6.33 - 5) + (6.33 - 5) + (6.33 - 13) = 0$$

Men denne sum vil altid give 0 og er derfor uanvendelig som mål.

Et mål for afvigelsen skal opfylde, at hvis det observerede ligger langt fra det forventede, skal vi have en stor værdi, mens vi skal have en værdi tæt på 0, hvis det observerede ligger tæt på det forventede.

Vi kunne så forsøge os med mål, hvor vi kvadrerer afvigelserne for at slippe af med fortegnene

$$\sum_{i=1}^6 (\text{observeret}_i - \text{forventet}_i)^2 = (6.33 - 5)^2 + (6.33 - 4)^2 + (6.33 - 5)^2 + (6.33 - 5)^2 + (6.33 - 13)^2 = 55.2245$$

Dette mål har de ønskede egenskaber, men det har vist sig, at være smartere at benytte et relativt mål, hvor kvadratet på afvigelserne ses i forhold til de forventede værdier.

$$\sum_{i=1}^6 \frac{(\text{observeret}_i - \text{forventet}_i)^2}{\text{forventet}_i} = \frac{(6.33 - 5)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 4)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 5)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 5)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 13)^2}{6.33} = 8.741453396$$

Dette mål, der i 1908 blev introduceret af statistikeren Karl Pearson (1857 - 1936), skal vise sig at have nogle interessante egenskaber. I det følgende vil vi benytte betegnelsen **teststørrelsen** for Pearsons mål og betegne denne med Q.

Eksempel

Antag, at vi i stedet har disse observerede værdier (altså samme eksperiment som ovenfor, samme 0-hypotese, samme forventede værdier, men med andre observerede værdier)

udfald	1	2	3	4	5	6
antal	0	6	6	7	6	13

Umiddelbart ser dette mere kritisk ud, idet vi får en masse 6'ere på bekostning af 1'ere og vi får næsten de forventede værdier for de øvrige udfald. Det kan tyde på, at der er boret et hul i terningen og fyldt bly i for at tvinge terningen til at give flere 6'ere.

Teststørrelsen bliver her

$$Q = \frac{(6.33 - 0)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 6)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 6)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 7)^2}{6.33} + \frac{(6.33 - 6)^2}{6.33}$$

$$Q = 13.48078989 \quad (13.1)$$

Altså en hel del større her, hvilket betyder, at afvigelsen her er noget mere kritisk for 0-hypotesen end i det ovenstående tilfælde.

For at kunne danne os en ide om, hvordan værdierne af teststørrelsen fordeler sig, er det nødvendigt at regne Q ud for en masse gentagelser af det samme eksperiment, der altså består i at kaste en terning 38 gange og observere antallet af de enkelte udfald.

Vi vil lade Maple foretage alle disse gentagelser og løbende få beregnet Q -værdien. Men først skal vi se på simulation af et enkelt terningkast i Maple.

13.3 Simulation af et enkelt terningkast

Et kast med en terning har 6 mulige udfald – ofte betegnet 1, 2, 3, 4, 5, og 6, hvor fx udfaldet 2 betyder, at den side af terningen, der vender op, har to øjne.

Hvis terningen er en ægte (eller en symmetrisk) terning, har alle udfald den samme sandsynlighed, nemlig $\frac{1}{6}$.

For en ægte terning kan vi så opstille denne sandsynlighedstabel:

u	1	2	3	4	5	6
$P(u)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Formelt set, kan et kast med en ægte terning beskrives som et udfald af en stokastisk variabel X , der har en sandsynlighedsfordeling givet ved tabellen ovenfor.

X kan altså antage værdierne 1, 2, 3, 4, 5, og 6, og sandsynligheden for, at X antager værdien 1, er $\frac{1}{6}$, og sandsynligheden for, at X antager værdien 2, er $\frac{1}{6}$, osv.

For at efterligne et terningkast i Maple, skal vi først have indlæst *Statistics*-pakken, der rummer de nødvendige værktøjer:

`with(Statistics) :`

$$P := \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right]$$

$$P := \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right] \quad (13.2)$$

$X := \text{RandomVariable}(\text{ProbabilityTable}(P))$

$$X := _R15 \quad (13.3)$$

Dette definerer præcis det terningkast, der er beskrevet ovenfor. Lad os prøve at kaste med terningen:

$\text{Sample}(X, 1)$

$$\left[\begin{array}{c} 3. \end{array} \right] \quad (13.4)$$

Jeg fik en 1'er. Du vil sikkert få noget andet. Vi prøver igen, men denne gang kaster vi 10 gange:

$\text{Sample}(X, 10)$

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} 1. & 3. & 2. & 1. & 4. & 6. & 6. & 2. & 5. & 5. \end{array} \right] \quad (13.5)$$

Igen vil du sikkert få noget andet. Kaster vi mere end 100 gange, vil Maple ikke længere vise de enkelte udfald automatisk. I stedet vil vi, ved fx 200 kast med terningen, få noget i stil med

$\text{Sample}(X, 200)$

$$\begin{aligned} & [2., 3., 5., 6., 5., 6., 6., 5., 3., 6., 5., 2., 4., 3., 3., 6., 3., 1., 5., 6., 6., 3., 1., 5., 3., 6., 4., 3., 3., \\ & 4., 1., 3., 3., 3., 2., 1., 4., 5., 3., 5., 5., 1., 1., 4., 5., 1., 4., 3., 3., 3., 4., 5., 5., 6., 5., 2., 5., \\ & 5., 5., 6., 5., 1., 3., 2., 1., 5., 2., 2., 6., 4., 1., 3., 2., 2., 6., 4., 6., 2., 1., 6., 5., 6., 3., 1., 2., \\ & 3., 1., 2., 6., 1., 6., 6., 5., 3., 6., 6., 5., 3., 2., 2., \dots, \dots \text{ 100 row vector entries not shown}] \end{aligned} \quad (13.6)$$

show all →

$$\left[\begin{array}{cc} 2. & 3. & 5. & 6. & 5. & 6. & 6. & 5. & 3. & 6. & 5. & 2. & 4. & 3. & 3. & 6. & 3. & 1. & 5. & 6. & 6. & 3. & \dots \end{array} \right] \quad (13.7)$$

hvor alle udfald bliver vist ved at klikke på output og vælge **Show All** i kontekstmenuen. Skal vi blot have et hurtigt kig på udfaldene, kan flytte markøren op i resultatet for 'show all'. Herved vil der komme en scroll-bar frem under listen, som vi kan trække i. Dette vil dog kræve en genberegning af de ovenstående kommandolinjer først.

13.4 Gentagne kast med en terning

Da terningen, vi benytter, er implementeret som en ægte terning, skulle vi gerne have nogenlunde det samme antal af hvert af de mulige udfald. Lad os se, hvordan det ser ud ved 38 kast med terningen:

$\text{with}(Gym) :$

$U := \text{Sample}(X, 38) :$

$$H := \left[\begin{array}{cc} 1. & 4 \\ 2. & 5 \\ 3. & 5 \\ 4. & 11 \\ 5. & 9 \\ 6. & 4 \end{array} \right] \quad (13.8)$$

Her ville vi forvente ca. 6 udfald af hver slags, men hvis du prøver nogle gange (ved at genberegne ovenstående to linjer), vil du se, at der faktisk kan være ganske store udsving.

De **forventede værdier** under forudsætning af H_0 er:

$$forv := P \cdot 38.$$

$$forv := [6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333] \quad (13.9)$$

og de **observerede værdier** er (2. søjle i matricen ovenfor)

$$obs := [seq(H[i, 2], i = 1 .. 6)]$$

$$obs := [4, 5, 5, 11, 9, 4] \quad (13.10)$$

Vi gentager nu eksperimentet '38 kast med en terning' 1000 gange og beregner hver gang teststørrelsen:

OBS: Programmet (for-løkken) skal stå i én samlet programblok. Det klarer du ved at taste Shift+Enter efter hver programlinje under indtastningen. Husk også at afslutte kommandolinjer med semikolon og afslut selve programmet med et kolon, så du undgår at få udskrevet output.

$op(H)[1]$ er et udtryk for antallet af rækker i matricen H . Der er jo ingen garanti for, at alle udfaldene forekommer i hvert eksperiment. Sker det, at et udfald ikke forekommer, vil H ikke have 6 rækker – og programmet vil fejle, hvis der summeres fra $i = 1$ til 6.

Multiplikationen med 1.0 sikrer, at alle resultater er decimaltal.

$$Qv := Vector(1000) :$$

for j from 1 to 1000 do

$$S := Sample(X, 38) :$$

$$H := hyppighed(S) :$$

$$Qv_j := add\left(\frac{(H_{i,2} - forv_i)^2}{forv_i} \cdot 1.0, i = 1 .. op(H)[1]\right) :$$

end do:

Du kan se alle værdierne af Qv i denne datatabel:

	Q
1	.632258...
2	.158064...
3	8.72258...
4	.545161...
5	0.29032...
6	0.29032...
7	0.12903...
8	.206451...
9	.825806...
10	.632258...

Lad os studere værdierne i Qv nærmere. Først finder vi den mindste og den største værdi:

$\min(Qv) = 0.2105263158$

$\max(Qv) = 21.36842105$

Vi benytter disse til at lave en gruppering af værdierne i 20 grupper: $[0, 1], [1, 2], \dots, [10, 20]$:

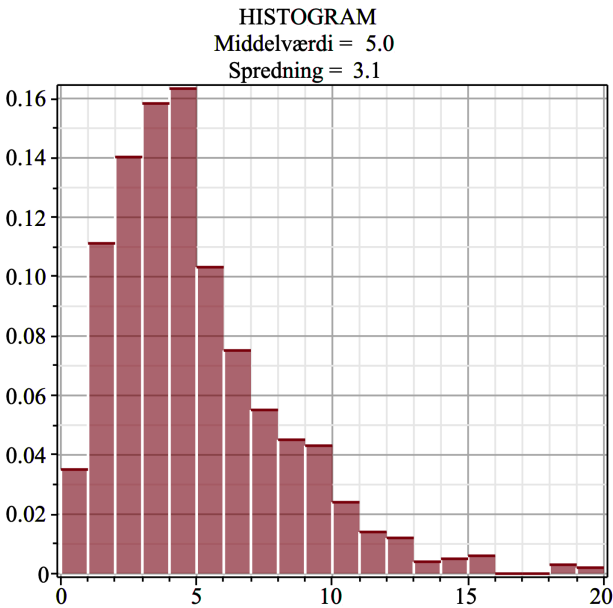
$G := \text{grupperData}(Qv, 0..20, 20)$

$G :=$

0 ..1.	35
1. ..2.	111
2. ..3.	140
3. ..4.	158
4. ..5.	163
5. ..6.	103
6. ..7.	75
7. ..8.	55
8. ..9.	45
9. ..10.	43
10. ..11.	24
11. ..12.	14
12. ..13.	12
13. ..14.	4
14. ..15.	5
15. ..16.	6
16. ..17.	0
17. ..18.	0
18. ..19.	3
19. ..20	2

(13.11)

$\text{plotHistogram}(G)$



Vi har nu allerede det første indtryk af, hvordan fordelingen af værdierne af Q ser ud. I vores aktuelle observation fik vi en Q værdi på 8.74 – og som vi kan se nu, så er det slet ikke så ualmindeligt endda at få en værdi på 8.74 eller større.

For at regne ud, hvor mange procent af udfaldene, der vil have en Q værdi, der er større end eller lig med 8.74, skal vi finde *arealet af stolperne til højre* for 8.74:

Husk på, at i et histogram er arealet af en stolpe er lig med intervalfrekvensen i det interval, stolpen er tegnet over. Når vi udregner de kumulerede frekvenser, så er det netop arealerne af stolperne, vi løbende lægger sammen (fra venstre mod højre), og ender op med 1, som det samlede areal.

Sumkurven, der tegnes på basis af de kumulerede frekvenser, kan således opfattes som en funktion, der for ethvert x har en værdi, der er svarer til arealet af stolperne i histogrammet til venstre for x .

Arealet af stolperne i histogrammet til *venstre* for 8.74 er da

$$\text{sumkurve}(G, 8.74) = 0.875050100200401$$

– og dermed er arealet af stolperne i histogrammet til *højre* for 8.74

$$1 - \text{sumkurve}(G, 8.74) = 0.124949899799599$$

Du vil sikkert få et andet resultat, da det afhænger af udfaldet af simulationen, men størrelsesordenen vil nok være omkring 10%.

I det andet eksempel, vi regnede på, fik vi $Q = 13.48$. Vi kan tilsvarende beregne, hvor mange procent af udfaldene, der vil have en Q -værdi, der er større end eller lig med 13.47:

$$1 - \text{sumkurve}(G, 13.48) = 0.0181162324649299$$

Og her vil størrelsesordenen være omkring 2%.

Det er så op til os at vurdere, hvornår en værdi af Q er acceptabel og hvornår den må anses for kritisk.

En almindelig vedtægt er, at hypotesen H_0 forkastes ikke – dvs., at vi tror på H_0 på basis af vores observationer – hvis Q -værdien befinder sig blandt de 95% mindste, hvorimod H_0 forkastes, hvis Q -værdien befinder sig blandt de 5% største.

Vi kan bestemme, hvor skillelinjen er mellem de acceptable og de kritiske værdier ved at løse ligningen

$$\text{fsolve}(1 - \text{sumkurve}(G, k) = 0.05, \{k\})$$

$$\{k = 10.83750000\} \quad (13.12)$$

k kaldes den **kritiske værdi**. Og de 5% kaldes **signifikansniveauet**.

Dvs., at hvis $Q \leq 10.8$ (resultatet kan variere her), så er Q -værdien acceptabel og vi forkaster ikke H_0 , men hvis $Q > 11$, så forkaster H_0 . Vores oprindelige observationer, hvor vi fandt $Q = 8.74$, fører altså ikke til, at vi forkaster H_0 .

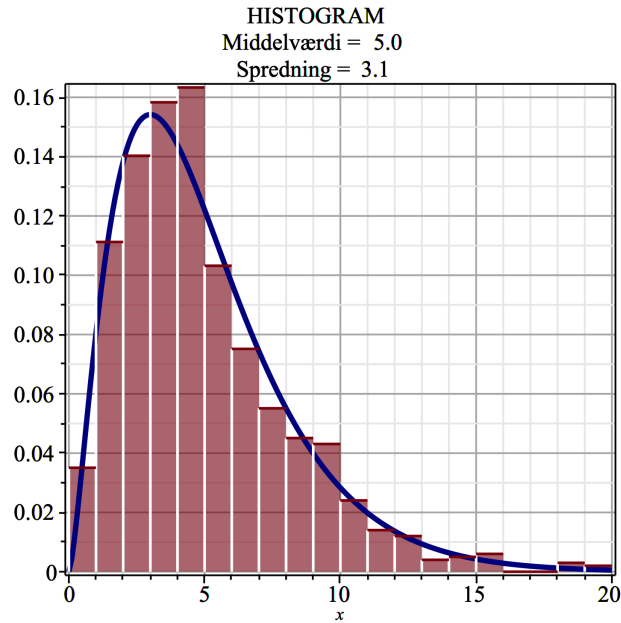
Problemet med den simulation, vi har lavet her, er, at den kritiske værdi ændres, hvis vi genberegner, hvilket naturligvis ikke er hensigtsmæssigt. Hvis du har genberegnet nogle gange, vil du have set, at histogrammet får samme form hver gang. Vi skal have bestemt denne form vha. en kontinuert funktion.

13.5 Modellen

Man har regnet sig frem til, at denne funktion vil matche histogrammet:

$$chi5(x) := \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x};$$

```
plots[display]([plot(chi5(x), x = 0 ..20, color = "Navy", thickness = 3), plotHistogram(G)])
```



Lad os lige tjekke, at arealet under kurven giver 1:

$$\int_0^{\infty} chi5(x) \, dx = 1$$

Funktionen *chi5* kaldes tæthedsfunktionen for en χ^2 -fordeling med 5 frihedsgrader.

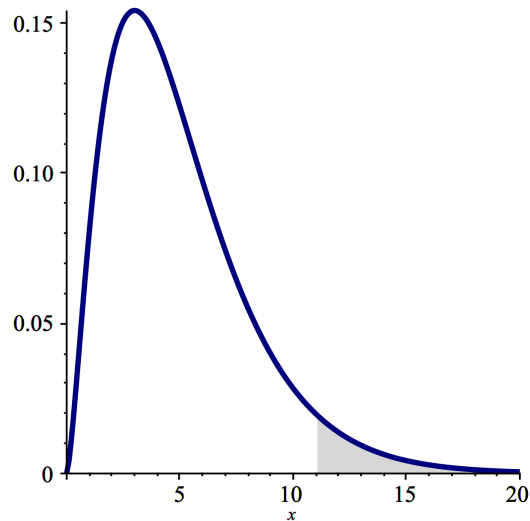
Da vi nu har fundet en funktion, hvis graf matcher udseendet af histogrammet, vi har set ovenfor, og samtidig opfylder, at arealet under grafen er 1, har vi godtgjort, at Pearsons mål Q for afvigelsen mellem de observerede og forventede værdier ved eksperimentet '38 kast med en terning' er χ^2 -fordelt med 5 frihedsgrader.

Tilbage står vi naturligvis med spørgsmålet om, hvad frihedsgrader er for noget, men det ser vi på i næste afsnit.

Ved at benytte **modellen**, kan vi fastlægge den **kritiske værdi**. Det gør vi ved at bestemme k , så arealet af det skraverede område (se grafen nedenfor) er 5% (brug 'Numerically Solve'):

$$\int_k^{\infty} chi5(x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 11.07049769 \xrightarrow{\text{assign to a name}} k$$

```
plots[display]([plot(chi5(x), x = k ..20, color = gray, filled), plot(chi5(x), x = 0 ..20, color
= "Navy", thickness = 3)])
```



I forbindelse med en konkret test, hvor vi har udregnet en Q -værdi – fx som i eksemplet ovenfor, hvor $Q = 8.74$ – kan vi i modellen også udregne den såkaldte **p-værdi**.

p-værdien afhænger af Q og er sandsynligheden for at få nogle observerede værdier, der afviger mere fra de forventede værdier end dem, vi har observeret. Kort sagt: Sandsynligheden for at få en større Q -værdi end den, vi har fået.

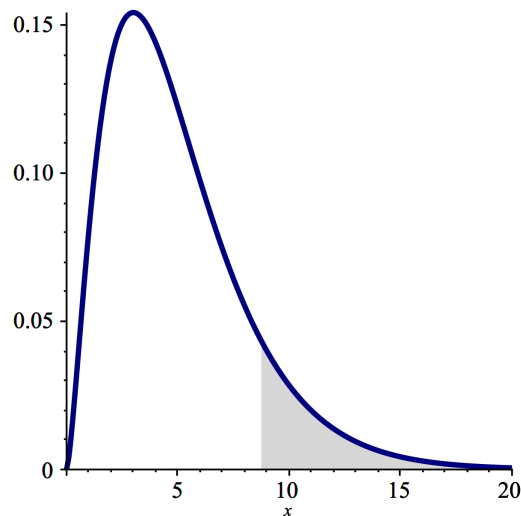
Ofte benyttes den alternative formulering af betydningen af p-værdien: Sandsynligheden for at få en fordeling af observationerne, der er lige så skæv eller skævere end den, vi har fået.

p-værdien kan udregnes som arealet af det skraverede område (se nedenfor)

$$Q := 8.74 = 8.74$$

$$\int_Q^{\infty} \text{chi5}(x) \, dx = 0.1198949982$$

```
plots[display]([plot(chi5(x), x = Q ..20, color = gray, filled), plot(chi5(x), x = 0 ..20, color
= "Navy", thickness = 3)])
```



Dvs., at sandsynligheden er ca. 12% for at få en fordeling af observationerne, der er lige så skæv eller skævere end den vi har fået.

p-værdien kan også benyttes til at afgøre, om en 0-hypotese skal forkastes eller ej. Hvis $p < 0.05$, så må Q-værdien ligge i det kritiske område og 0-hypotesen skal forkastes. Hvis derimod $p \geq 0.05$, forkastes hypotesen ikke.

13.6 Frihedsgrader

Vi benytter '38 kast med en terning' som eksempel, men lad os for en sikkerheds skyld genstarte Maple og definere hele opsætningen igen:

restart

with(Gym) :

with(Statistics) :

$P := \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right] :$

$X := \text{RandomVariable}(\text{ProbabilityTable}(P)) :$

Som tidligere gentager vi eksperimentet '38 kast med en terning' 1000 gange. Til registreringen benytter vi en vektor *obs* med plads til 1000 elementer.

$obs := \text{Vector}(1000) :$

for j from 1 to 1000 do

$S := \text{Sample}(X, 38);$

$H := \text{hyppighed}(S);$

$obs_j := H_{1,2}$

end do:

OBS: $H_{1,2}$ er det element, der står i 1. række og 2. søjle i matricen H (der i første søjle har udfaldene og i anden søjle de tilhørende hyppigheder).

$obs =$

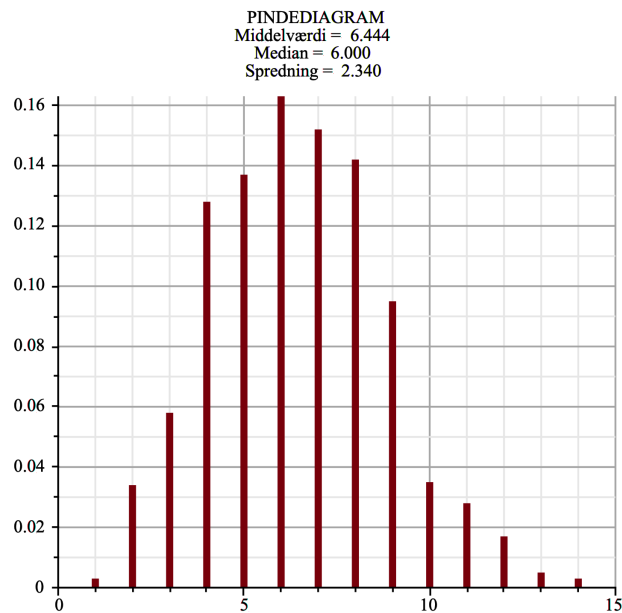
1	3
2	8
3	4
4	6
5	8
6	5
7	7
8	7
9	4
10	6
⋮	⋮
1000	⋮

1000 element Vector[column]

Denne matrix viser, at i den første serie af 38 kast med terningen fik vi 3 1'ere, i den anden serie fik vi 8 1'ere, osv.

For at få et overblik over elementerne i *obs*, kan vi tegne et pindediagram:

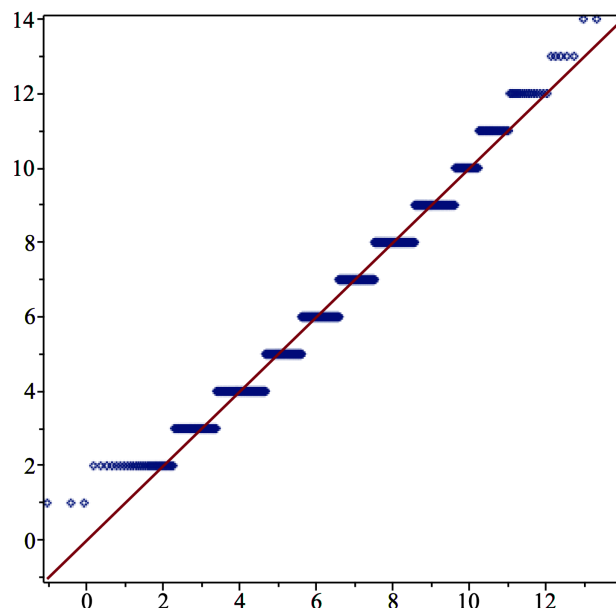
`plotPindediagram (obs)`



Antallet af 1'ere ser næsten normalfordelt ud, centreret om middelværdien ca. 6.

Maple har indbygget kommandoen *NormalPlot* til visuelt at tjekke dette. Her skal de plottede punkter så nogenlunde følge linjen $y = x$, på en sådan måde, at det passer bedst omkring middelværdien, mens det ikke er så vigtigt i enderne. Hvilke punkter, Maple plotter her, er ikke helt klart, men fremgår af Maple's online hjælp..

`NormalPlot(obs)`



Som middelværdi og spredning benytter Maple de værdier, der kan beregnes ud fra observationerne:

$\mu := \text{middel}(\text{obs})$

$\mu := 6.31900$

(13.13)

$\sigma := \text{standardafvigelse (obs)}$

$$\sigma := 2.25529 \quad (13.14)$$

Det, vi har søgt at modellere, er eksperimentet '38 kast med en terning'. Vi har kastet terningen 38 gange med *Sample*(*X*, 38) og registreret antallet af de enkelte udfald. Eksperiment har vi så gentaget 1000 gange.

Nu ved vi, at antallet af 1'ere i '38 kast med en terning' er normalfordelt med middelværdi ca. 6.3 og spredning på ca. 2.3. Og tilsvarende for antallet af 2'ere osv. Så i princippet kunne vi vel blot tage 6 værdier fra en normalfordelt stokastisk variabel *Y* med middelværdi 6.4 og spredning 2.3, og benytte disse som hyppighederne af de enkelte udfald. Lad os prøve:

$Y := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(6.3, 2.3))$

$$Y := _R33 \quad (13.15)$$

$S := \text{Sample}(Y, 6) :$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 5. & 12. & 5. & 9. & 5. & 7. \end{array} \right] \quad (13.16)$$

Problemet er, at her er summen af hyppighederne ikke nødvendigvis 38 – og det skal den være, ellers modellerer vi jo ikke 38 kast med en terning.

Vi må altså nøjes med at tage 5 værdier fra *Y* og beregne den sidste som det, summen mangler i at give 38. Det er netop derfor man siger, at der er 5 **frihedsgrader**.

Helt uproblematisk er det dog ikke at tage 5 værdier fra *Y*, idet summen af disse godt kan være større end 38. Hvis du vil lege videre med disse ideer, så er her en lille programstump, der kan være til hjælp. Men pas på, der kan forekomme negative værdier for det 6. udfald:

$Y := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(6.4, 2.3)) :$

$u := \text{Sample}(Y, 5) :$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 7. & 1. & 9. & 9. & 9. & 3. \end{array} \right] \quad (13.17)$$

13.7 Farvefordeling i M&M's poser

Ifølge M&M's hjemmeside er farvefordelingen i *M&M Milk Chocolate* denne

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
procentdel	13 %	14 %	13 %	20 %	16 %	24 %

For undersøge dette har en amerikaner ved navn Josh Madison indkøbt et karton M&M's med 48 pakker og optalt disse. Der var i alt 2620 stk.

Han observerede følgende:

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
antal	371	369	372	544	483	481

Vi vil teste på niveau 5%, om Josh Madisons observationer følger samme fordeling som den, der er oplyst af M&M's. Hertil opstiller vi 0-hypotesen:

H_0 : Josh Madisons observationer følger den fordeling, der er oplyst af M&M's

Dette eksempel er i princippet fuldstændig identisk med '38 kast med en terning', men lad os for en god ordens skyld bygge en simulation, der udfører Josh Madisons eksperiment 1000 gange. Det er en gratis omgang, da simulationen til '38 kast med en terning' umiddelbart kan genbruges.

Først skal vi dog lige have beregnet de forventede værdier under forudsætning af H_0 og have beregnet Q . Observationerne indtastes i listen *obs* og den forventede procentvise fordeling indtastes i listen *P*:

restart

with(Gym) :

with(Statistics) :

obs := [371, 369, 372, 544, 483, 481]

$$\textcolor{blue}{obs} := [371, 369, 372, 544, 483, 481] \quad (13.18)$$

P := [0.13, 0.14, 0.13, 0.20, 0.16, 0.24]

$$\textcolor{blue}{P} := [0.13, 0.14, 0.13, 0.20, 0.16, 0.24] \quad (13.19)$$

og de forventede værdier beregnes ved

forv := $P \cdot 2620$

$$\textcolor{blue}{forv} := [340.60, 366.80, 340.60, 524.00, 419.20, 628.80] \quad (13.20)$$

Herefter kan Q kan beregnes ved

$Q := \text{chi2Teststørrelse}(obs, forv)$

$$\textcolor{blue}{Q} := 50.83519804 \quad (13.21)$$

Vi definerer en stokastisk variabel ved

$X := \text{RandomVariable}(\text{ProbabilityTable}(P))$

$$\textcolor{blue}{X} := \textcolor{blue}{_R3I} \quad (13.22)$$

For at efterligne Josh Madisons eksperiment, tager vi 2620 værdier fra denne og finder hyppighederne af de enkelte farver (1=Brun, 2=Gul, osv)

hyppighed (*Sample* (*X*, 2620))

$$\left[\begin{array}{cc} 1. & 322 \\ 2. & 351 \\ 3. & 359 \\ 4. & 533 \\ 5. & 444 \\ 6. & 611 \end{array} \right] \quad (13.23)$$

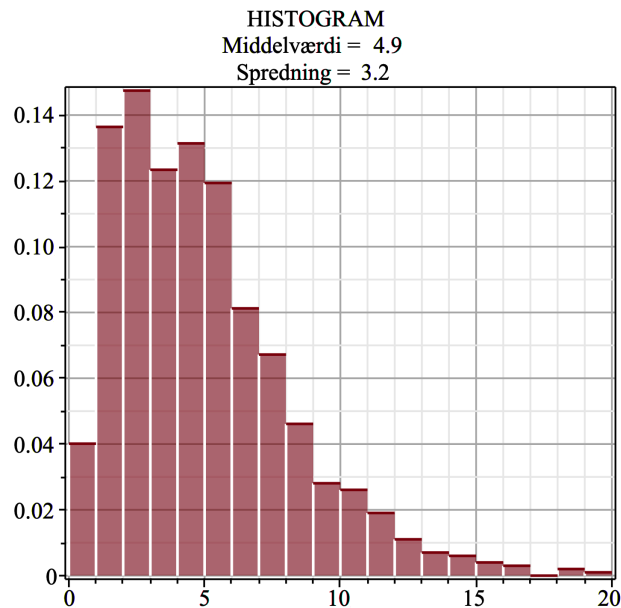
Det gør vi så 1000 gange og beregner hver gang Q -værdien

$Q_v := \text{Vector}(1000) :$

```

for  $j$  from 1 to 1000 do
 $S := \text{Sample}(X, 2620) :$ 
 $H := \text{hyppighed}(S) :$ 
 $H2 := \text{LinearAlgebra}[\text{Column}](H, 2) :$ 
 $Qv_j := \text{chi2Teststørrelse}(H2, \langle \text{forv} \rangle) :$ 
end do:
 $G := \text{grupperData}(Qv, 0 .. 20, 20) :$ 

```



Her kan vi så forlade det eksperimentelle og gå til modellen. Her ved vi fra tidligere, at den kritiske værdi er 11.07, så med en Q -værdi på 50.83 giver Josh Madisons observationer ikke anledning til at tro på den af M&M's oplyste farvefordeling. Derfor kan den oplyste farvefordeling godt være rigtig alligevel. Fabrikationen foregår formodentlig ved, at man fylder den 'korrekte' mængde af de enkelte farver i en stor beholder, rører godt rundt, hvorefter indholdet pakkes i poser. Måske er det omrøringen, der ikke er har været god nok. Det eneste, vi kan konkludere, er, at vi på baggrund af observationerne er nødt til at forkaste H_0 .

De gule passer fint, der er lidt for mange brune, grønne, orange og røde, men der er alt for få af de blå. Lad os se, hvad det betyder for Q værdien ved at beregne de enkelte bidrag:

Bidrag til Q fra de brune:

$$\frac{(371 - 340.60)^2}{340.60} = 2.713329418$$

Bidrag til Q fra de gule:

$$\frac{(369 - 366.8)^2}{366.8} = 0.01319520174$$

osv.

Gym-pakken har indbygget en funktion, der kan regne disse bidrag ud:

$\text{bidrag}(\text{obs}, \text{forv})$

$$[2.713329419, 0.01319520174, 2.894773928, 0.7633587786, 9.710019084, 34.74052163] \quad (13.24)$$

- og her fremgår tydeligt, at det er den store mangel på de blå, der er ansvarlig for den meget store Q -værdi.

Detaljerne findes her: joshmadison.com

13.8 Krydsning af tomatplanter

Ved krydsning mellem to typer tomatplanter forventes, at halvdelen af afkommet vil få gule blade og halvdelen vil få grønne blade. I et forsøg fandt man, at 671 ud af i alt 1240 kimplanter har grønne blade og 569 har gule blade. Kan denne forskel tilskrives tilfældigheder?

Forventet fordeling:

farve	Grøn	Gul
procentdel	50 %	50 %

Observerede antal:

farve	Grøn	Gul
antal	671	569

For at teste om forskellen mellem det forventede og det observerede skyldes tilfældigheder, tager vi udgangspunkt i 0-hypotesen

H_0 : Det observerede følger den forventede fordeling

og vil teste denne på signifikansniveau 5%.

Vi beregner de forventede værdier under forudsætning af H_0 og teststørrelsen Q . Observationerne indtastes i listen *obs* og den forventede procentvise fordeling indtastes i listen *P*:

restart

with(Gym) :

with(Statistics) :

obs := [671, 569]

obs := [671, 569] (13.25)

P := [0.5, 0.5]

P := [0.5, 0.5] (13.26)

og de forventede værdier beregnes ved

forv := $P \cdot 1240$

forv := [620.0, 620.0] (13.27)

Herefter kan Q kan beregnes ved

$Q := \text{chi2Teststørrelse}(obs, forv)$

$Q := 8.390322580$ (13.28)

Vi definerer en stokastisk variabel ved

$X := \text{RandomVariable}(\text{ProbabilityTable}(P))$

$X := _R3I$ (13.29)

og retter simulation fra forrige afsnit lidt til, så vi kan foretage 1000 gentagelser af krydsningseksperimentet:

$Qv := \text{Vector}(1000)$:

```

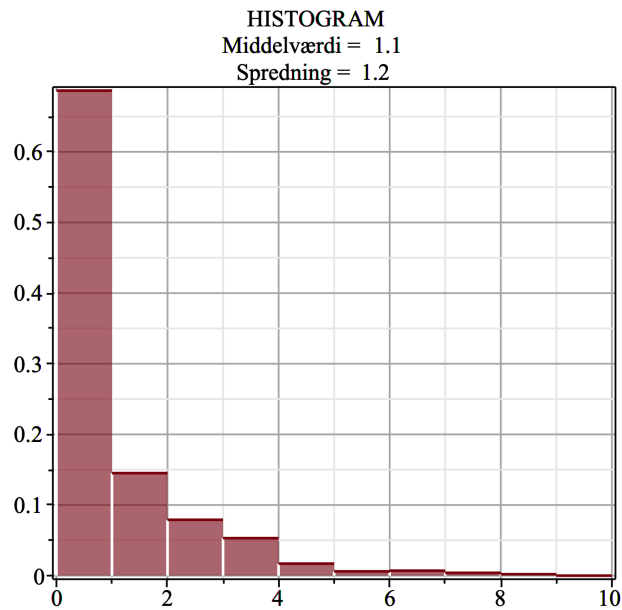
for  $j$  from 1 to 1000 do
 $S := \text{Sample}(X, 1240) :$ 
 $H := \text{hyppighed}(S) :$ 
 $H2 := \text{LinearAlgebra}[\text{Column}](H, 2) :$ 
 $Qv_j := \text{chi2Teststørrelse}(H2, \langle \text{forv} \rangle) :$ 
end do :
 $G := \text{grupperData}(Qv, 0 .. 10, 10) :$ 

```

```

 $\text{plotHistogram}(G)$ 

```



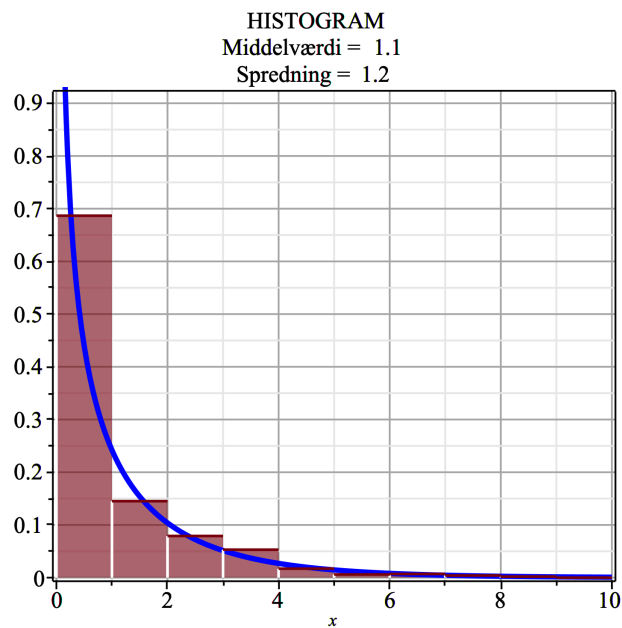
Fordelingen af Q-værdierne ser noget anderledes ud denne gang, men her har vi jo også kun 1 frihedsgrad. Funktionen, der matcher dette udseende af histogrammet, er denne

$$\text{chi1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} :$$

```

 $\text{plots}[\text{display}]([\text{plot}(\text{chi1}(x), x = 0 .. 10, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3), \text{plotHistogram}(G)], \text{size}$ 

```



Ved at benytte modellen, kan vi fastlægge den kritiske værdi. Det gør vi ved at bestemme k , så arealet af det skraverede område (se grafen nedenfor) er 5% (brug 'Numerically Solve'):

$$\int_k^{\infty} \text{chi1}(x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 3.841458821 \xrightarrow{\text{assign to a name}} k$$

Med vores Q-værdi på 8.39 er vi nødt til at forkaste hypotesen H_0 på det foreliggende grundlag.

13.9 Chi2-fordelingen

restart

Vi har set to eksempler på χ^2 -fordelinger:

1 frihedsgrad:

$$\text{chi1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

5 frihedsgrader:

$$\text{chi5}(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Umiddelbart har de to funktioner visse fælles træk. Det viser sig, at en χ^2 -fordeling med f frihedsgrader kan skrives som

$$\text{chi}(x) = k \cdot x^{\frac{f}{2} - 1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\chi(x) = k x^{\frac{f}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (13.30)$$

hvor k er en normeringskonstant, der er bestemt ved, at arealet under grafen skal være 1 – altså ved $k \cdot \int_0^{\infty} \text{chi}(x) \, dx = 1$.

Denne normeringskonstant kan beregnes til $2^{\frac{f}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)$, hvor $\Gamma(x)$ er den såkaldte Gamma-funktion.

I Maple kan du udregne således (Skriv **GAMMA** i math-mode og tryk på ESC-tasten, så kan du vælge symbolet som det øverste i listen). Fx er

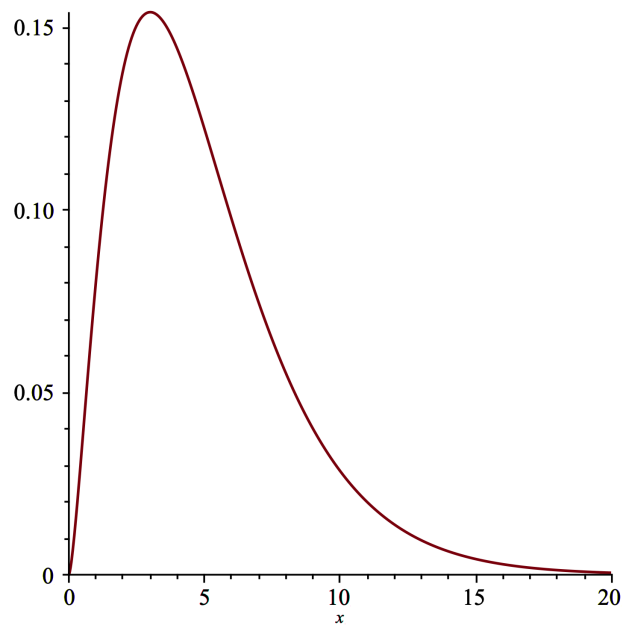
$$2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\pi}$$

$$2^{\frac{5}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \sqrt{2} \sqrt{\pi}$$

I Gym-pakken er χ^2 -fordelingen med f frihedsgrader implementeret ved $\text{chipdf}(f, x)$. Vil du plotte χ^2 -fordelingen med 5 frihedsgrader, så skriver du blot

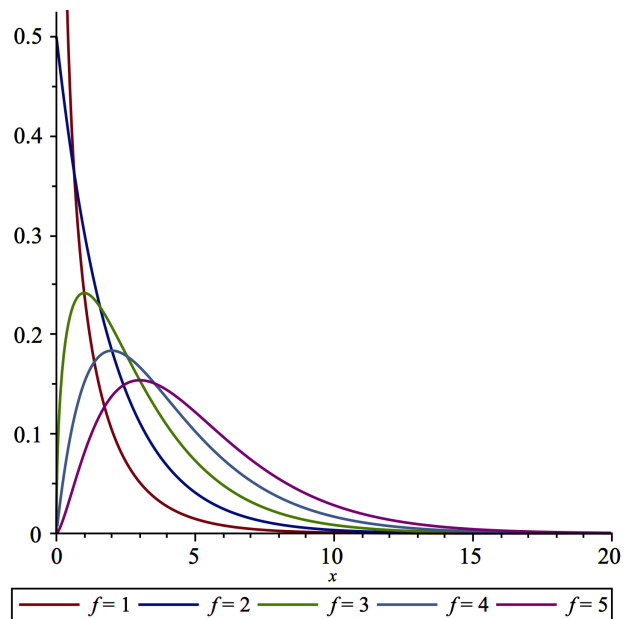
with(Gym) :

plot(chipdf(5, x), x = 0 ..20)



Og et lille udvalg:

plot([chipdf(1, x), chipdf(2, x), chipdf(3, x), chipdf(4, x), chipdf(5, x)], x = 0 ..20, legend



13.10 Chi2-test for Goodness of Fit - opskrift

En χ^2 -test for Goodness of Fit er en test, hvor vi undersøger, hvor godt en række observerede data stemmer overens med en forventet fordeling. Vi har allerede lavet 3 af disse:

Terningkast:

Her undersøgte vi, om disse resultater fra '38 kast med en terning'

udfald	1	2	3	4	5	6
antal	5	4	5	6	5	13

ville stemme overens med en forventning om, at terningen er ægte. Hertil benyttede vi en χ^2 -test for Goodness of Fit med 5 frihedsgrader.

M&M's

Her undersøgte vi, om denne fordeling farvefordeling blandt 2640 *Milk Chocolate M&M's*:

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
antal	371	369	372	544	483	481

ville stemme overens med den forventede fordeling

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
procentdel	13 %	14 %	13 %	20 %	16 %	24 %

Hertil benyttede vi også en χ^2 -test for Goodness of Fit med 5 frihedsgrader.

Krydsning af tomatplanter

Her undersøgte vi om de observerede resultater fra et eksperiment

farve	Grøn	Gul
antal	671	569

ville stemme overens med den forventede fordeling

farve	Grøn	Gul
procentdel	50 %	50 %

Hertil benyttede vi en χ^2 -test for Goodness of Fit med 1 frihedsgrad.

Med udgangspunkt i disse eksempler kan vi generalisere til

Opskrift til en χ^2 -test for Goodness of Fit

Du har de **observerede værdier** i et skema opdelt i kategorier:

kategori	1	2		n	i alt
antal	x_1	x_2		x_n	s

Tilsvarende har du oplysninger om den **forventede fordeling** (i en tabel eller på anden måde), ofte angivet i procent

kategori	1	2		n	i alt
antal	$p_1\%$	$p_2\%$		$p_n\%$	100 %

Nulhypotesen formuleres, og den skal altid være (men gerne formuleret i opgavens kontekst)

H_0 : Der er ingen signifikant forskel på observerede værdier og de forventede værdier

De observerede værdier indtastes i en liste

$$obs = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

og på baggrund af det samlede antal observationer og den forventede fordeling beregnes de forventede værdier ved

$$forv = \left[\frac{p_1}{100}, \frac{p_2}{100}, \dots, \frac{p_n}{100} \right] \cdot s$$

Teststørrelsen Q beregnes vha.

$$Q = \text{chi2Teststørrelse}(obs, forv)$$

Teststørrelsen Q er χ^2 -fordelt med $f = n - 1$ frihedsgrader.

Enten

Den kritiske værdi k bestemmes på baggrund af antallet af frihedsgrader og signifikansniveauet α ved at løse ligningen

$$\int_k^\infty \text{chipdf}(n-1, x) \, dx = \alpha$$

Hvis $Q \leq k$ forkastes H_0 ikke, hvis $Q > k$ forkastes H_0 .

Eller

p-værdien beregnes på baggrund af Q og antal frihedsgrader ved at beregne integralet

$$\int_Q^\infty \text{chipdf}(n-1, x) \, dx$$

Hvis $p \geq \alpha$ forkastes H_0 ikke, hvis $p < \alpha$ forkastes H_0 .

α er testens signifikansniveau.

Lad os prøve opskriften af på et eksempel:

Eksempel.

I et eksperiment krydser en studerende lyserøde blomster med hinanden. Ifølge arvelighedslovene skulle det forventede resultat være 25 % røde, 50 % lyserøde og 25 % hvide. Resultatet af eksperimentet blev 236 blomster, der fordelte sig på farverne som vist i tabellen:

	rød	lyserød	hvid
hyppighed	66	115	55

Formuler en konklusion, den studerende kan skrive i sin rapport, når der anvendes et signifikansniveau på 5 %?

Vi skal teste hypotesen

H_0 : Resultatet af eksperimentet er i overensstemmelse med arvelighedslovene

Vi starter med at indtaste de observerede værdier og beregner de forventede:

$$obs := [66, 115, 55] = [66, 115, 55]$$

$$forv := [0.25, 0.5, 0.25] \cdot 236 = [59.00, 118.0, 59.00]$$

Teststørrelsen beregnes:

$$Q := chi2Teststørrelse(obs, forv) = 1.177966102$$

Teststørrelsen Q er χ^2 -fordelt med 2 frihedsgrader.

Den kritiske værdi i en χ^2 -fordeling med 2 frihedsgrader bestemmes:

$with(Gym)$:

$$\int_k^\infty chipdf(2, x) \, dx = 0.05 \xrightarrow{\text{solve}} 5.991464547$$

Da $Q < 5.99$, forkastes H_0 ikke.

Alternativt:

p-værdien bestemmes

$$p := \int_Q^\infty chipdf(2, x) \, dx = 0.5548912940$$

Da $p > 0.05$, forkaster vi ikke H_0 .

Konklusionen er altså, at på baggrund af eksperimentet, kan vi ikke forkaste hypotesen om, at eksperimentet er i overensstemmelse med arvelighedslovene

13.11 Chi2-test for Goodness of Fit med Gym-pakken

Eksempel 1 (Terningkast)

Du har en mistanke om, at en af dine venner har en ”falsk” terning.

Derfor har du i al hemmelighed noteret udfaldet af alle vedkommendes kast med terningen gennem en hel aftens spil med dette resultat

udfald	1	2	3	4	5	6
antal	5	4	5	6	5	13

Giver dine observationer anledning til at din mistanke bestyrkes?

Løsning:

Vi formulerer først 0-hypotesen

H_0 : Terningen, der kastes med, er en ægte terning.

som vi vil teste på signifikansniveau 5%.

De observerede værdier indtastes i obs:

$obs := [5, 4, 5, 6, 5, 13]$

$obs := [5, 4, 5, 6, 5, 13]$ (13.31)

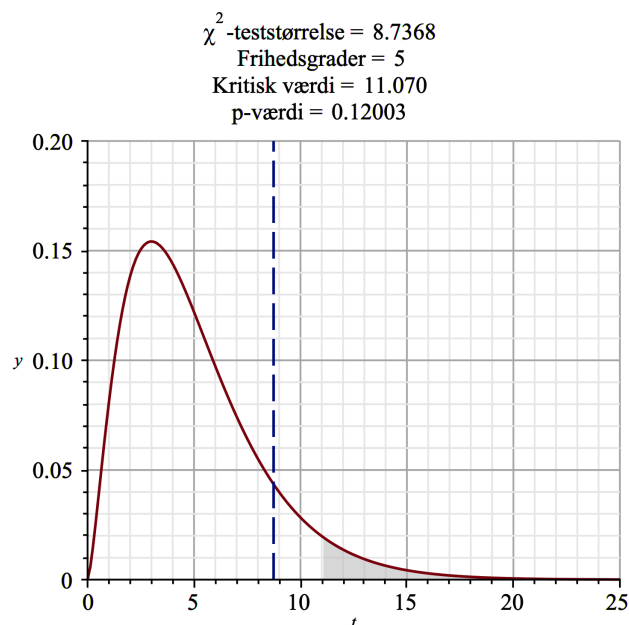
og de forventede værdier beregnes under forudsætning af H_0 :

$forv := \left[\frac{1}{6} \cdot 38 \right]$.

$forv := [6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333, 6.33333333]$ (13.32)

$with(Gym)$:

$chi2GOFtest(obs, forv, size = [350, 350])$



Da teststørrelsen $Q = 8.7$ er mindre end den kritiske værdi $k = 11.07$, forkaster vi ikke H_0 .

Alternativt:

Da p-værdien $p = 0.12$ er større end signifikansniveauet på 5%, forkaster vi ikke H_0 .

Eksempel 2 (M&M's)

Ifølge M&M's hjemmeside er farvefordelingen i *M&M Milk Chocolate* denne

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
procentdel	13 %	14 %	13 %	20 %	16 %	24 %

For undersøge dette har en amerikaner ved navn Josh Madison indkøbt et karton M&M's med 48 pakker og optalt disse. Der var i alt 2620 stk.

Han observerede følgende:

farve	Brun	Gul	Rød	Orange	Grøn	Blå
antal	371	369	372	544	483	481

Test på niveau 5%, om Josh Madisons observationer følger samme fordeling som den, der er oplyst af M&M's.

Løsning

Vi formulerer først 0-hypotesen:

H_0 : Josh Madisons observationer følger den fordeling, der er oplyst af M&M's

som vi vil teste på signifikansniveau 5%.

De observerede værdier indtastes i obs:

$obs := [371, 369, 372, 544, 483, 481]$

$$obs := [371, 369, 372, 544, 483, 481] \quad (13.33)$$

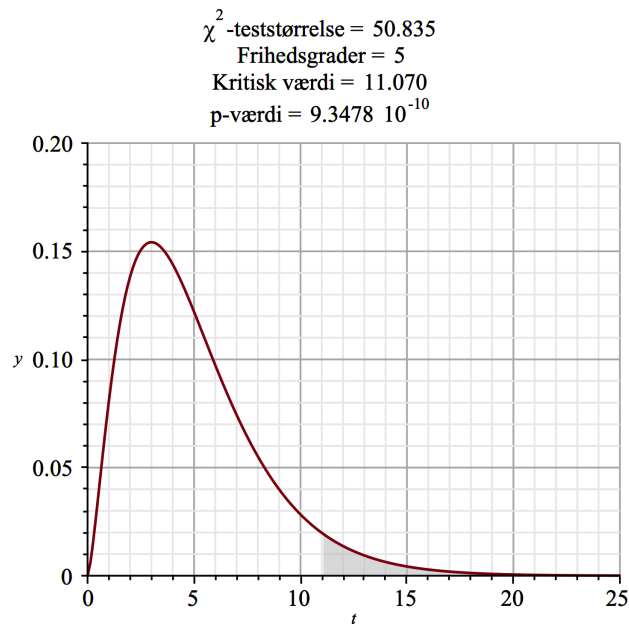
og de forventede værdier beregnes under forudsætning af H_0 :

$forv := [0.13, 0.14, 0.13, 0.20, 0.16, 0.24] \cdot 2620$.

$$forv := [340.60, 366.80, 340.60, 524.00, 419.20, 628.80] \quad (13.34)$$

with(*Gym*) :

chi2GOFtest(*obs*, *forv*)



Vi ser, at teststørrelsen $Q = 50.83$ er langt større end den kritiske værdi $k = 11.07$, så vi forkaster nulhypotesen.

Alternativt:

Da p-værdien $p = 9.3 \cdot 10^{-10}$ er mindre end signifikansniveauet på 5%, forkaster vi H_0 .

Eksempel 3 (Krydsning af tomatplanter)

Ved krydsning mellem to typer tomatplanter forventes, at halvdelen af afkommet vil få gule blade og halvdelen vil få grønne blade. I et forsøg fandt man, at 671 ud af i alt 1240 kimplanter har grønne blade og 569 har gule blade.

Kan denne forskel tilskrives tilfældigheder?

Løsning

For at teste om forskellen mellem det forventede og det observerede skyldes tilfældigheder, tager vi udgangspunkt i 0-hypotesen

H_0 : Det observerede følger den forventede fordeling

og vi vil teste denne hypotese med signifikansniveau 5%

De observerede værdier indtastes i *obs*:

obs := [671, 569]

obs := [671, 569] (13.35)

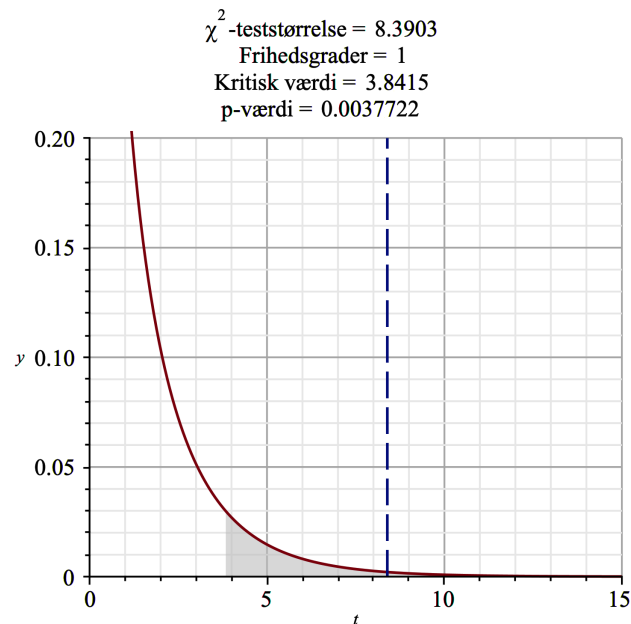
og de forventede værdier beregnes under forudsætning af H_0 :

forv := [0.5, 0.5] · 1240

forv := [620.0, 620.0] (13.36)

`with(Gym) :`

`chi2GOFtest(obs, forv)`



Vi ser, at teststørrelsen $Q = 8.39$ er langt større end den kritiske værdi $k = 3.84$, så vi forkaster nulhypotesen.

Alternativt:

Da p-værdien $p = 0.0037$ er mindre end signifikansniveauet på 5%, forkaster vi H_0 .

Eksempel 4 (Krydsning af blomster)

I et eksperiment krydser en studerende lyserøde blomster med hinanden. Ifølge arvelighedslovene skulle det forventede resultat være 25 % røde, 50 % lyserøde og 25 % hvide. Resultatet af eksperimentet blev 236 blomster, der fordelte sig på farverne som vist i tabellen:

	rød	lyserød	hvid
hyppighed	66	115	55

Formuler en konklusion, den studerende kan skrive i sin rapport, når der anvendes et signifikansniveau på 5 %?

Løsning

Vi skal teste hypotesen

H_0 : Resultatet af eksperimentet er i overensstemmelse med arvelighedslovene

Vi starter med at indtaste de observerede værdier:

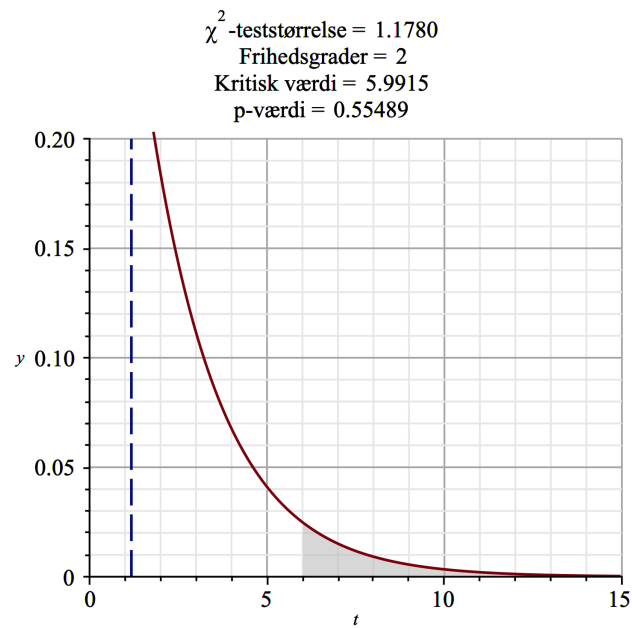
`obs := [66, 115, 55] = [66, 115, 55]`

og de forventede værdier beregnes under forudsætning af H_0 :

`forv := [0.25, 0.5, 0.25] · 236 = [59.00, 118.0, 59.00]`

with(Gym) :

chi2GOFtest(obs,forv)



Da teststørrelsen $Q = 1.178$ er langt mindre end den kritiske værdi $k = 5.99$, forkaster vi ikke H_0 .

Alternativt:

Da p-værdien $p = 0.55$ er større end signifikansniveauet på 5%, aforkaster vi ikke H_0 .