

Maple B-Niveau

**Copyright © Maplesoft
2026**

Indhold

1 Løsning af ligninger i Maple	1
1.1 Solve-kommandoen og førstegradsligninger	1
1.1.1 Metode 1 (kontekstmenuen)	1
1.1.2 Metode 2 (solve-kommandoen)	2
1.1.3 Metode 3 (smart popup)	2
1.2 To ligninger med to ubekendte	4
1.3 Ingen løsninger eller uendeligt mange løsninger	4
1.4 Andengradsligninger	6
1.4.1 Løsning med solve	6
1.4.2 Løsning med nulpunkter	6
2 Variabler i Maple	8
2.1 Navngivning	8
2.2 Definition af en variabel mm.	8
2.3 Rens en variabel	9
2.4 Indeks på variable	10
2.5 Brug af indeks	12
3 Reduktion af udtryk	13
3.1 Saml led med collect	13
3.2 Gang ind i parenteser med expand	13
3.3 Sæt uden for parentes med factor	14
3.4 Sæt på fælles brøkstreg med simplify	14
3.5 Reduktion af eksponenter med simplify	15
4 Rentesregning	16
4.1 Renteformlen	16
4.1.1 Eksempel 1 (K bestemmes)	16
4.1.2 Eksempel 2 (K_0 bestemmes)	16
4.1.3 Eksempel 3 (r bestemmes)	17
4.1.4 Eksempel 4 (n bestemmes)	17
4.2 Annuitetsformlen	18
4.2.1 Eksempel 1 (A bestemmes)	18
4.2.2 Eksempel 2 (y bestemmes)	18
4.2.3 Eksempel 3 (r bestemmes)	19
4.2.4 Eksempel 4 (n bestemmes)	19
4.3 Gældsformlen	20
4.3.1 Eksempel 1 (G bestemmes)	20
4.3.2 Eksempel 2 (y bestemmes)	20
4.3.3 Eksempel 3 (r bestemmes)	21
4.3.4 Eksempel 4 (n bestemmes)	21
4.4 Afvikling af gæld – amortisering	22
4.5 Alle renteberegninger i én ligning – TVM	23
4.5.1 Eksempler (med simpel kapitalfremskrivning)	24
4.5.2 Eksempler (med opsparing)	25
4.5.3 Eksempler (med gældsafvikling)	26
4.6 Leasing	27
4.6.1 Eksempel (uden restgæld)	28
4.6.2 Eksempel (med restgæld)	28
5 Andengradspolynomier og andengradsligninger	30
5.1 Udforsk andengradspolynomiet med Explorer Assistant	30
5.2 Toppunktsbestemmelse	31
5.3 Toppunktsbestemmelse - automatisk beregning	32
5.4 Faktoropløsning af andengradspolynomiet	33
5.5 CAS-beviser (Avanceret)	34
5.5.1 Toppunktsformlen	34
5.5.2 Andengradslikningen	35
5.5.3 Faktoropløsning	36

6 Funktioner	37
6.1 Regneforskrift	37
6.1.1 Alternativ definition	37
6.1.2 Eksempel	37
6.2 Graftegning	38
6.3 Lineære funktioner	42
6.3.1 eksempel	42
6.4 Stykkevist definerede funktioner	43
6.5 Nogle elementære funktioner	45
7 Logaritme- og eksponentialfunktioner	49
7.1 10-talslogaritmen $\log$	49
7.2 2-talslogaritmen – Øvelse	53
7.3 Eksperiment: Hvad er e ?	54
7.4 Den naturlige eksponentialfunktion	56
7.5 Den naturlige logaritme $\ln$	57
7.6 Eksempler	59
7.6.1 Eksempel 1	59
7.6.2 Eksempel 2	60
7.6.3 Eksempel 3	61
8 Regressioner	62
8.1 Gym-pakken skal indlæses	62
8.2 Import af data	62
8.3 Lineær regression	65
8.4 Eksponentiel regression	67
8.5 Potens regression	68
8.6 Kvadratisk regression	69
8.7 Polynomiel regression	70
8.8 Proportional regression	71
8.9 Andre typer: x^2 regression	73
8.10 Sådan får du fat i regressionskoefficienterne	75
9 Residualanalyse	77
9.1 Residualer og residualplot	77
9.2 Residualspredning	79
10 Differentialregning	81
10.1 Afledet funktion og differentialkvotient	81
10.2 Tangentbestemmelse	81
10.3 Tegning med Smart Plot	82
10.4 Tangentbestemmelse med Gym-pakken	84
10.5 Tangent Secant Tutor	84
10.6 Monotoniforhold	86
10.7 Curve Analysis Tutor	87
10.8 Eksempler	89
10.8.1 Eksempel 1	89
10.8.2 Eksempel 2	90
10.8.3 Eksempel 3	92
11 Analytisk geometri	94
11.1 Punkter i et koordinatsystem	94
11.1.1 Brug af plot-kommandoen til at afsætte punkter	95
11.2 Den rette linjes ligning	97
11.2.1 Alternativ beregning af a og b	98
11.2.2 Med Gym-pakken	99
11.3 Tegning af den rette linje	99
11.3.1 Smart Plot	100
11.3.2 Eksempel	100
11.4 Skæring mellem to linjer	103
11.5 Ortogonale linjer	105
11.6 Vinkler mellem to rette linjer	106
11.6.1 Eksempel	110

11.7 Længder og afstande	111
11.7.1 Afstandsformlen	111
11.7.2 Afstand fra en linje til et punkt	111
11.7.3 Eksempel 1	112
11.7.4 Eksempel 2	113
11.8 Cirklen	114
11.9 Plot af en cirkel	115
11.9.1 implicit plot (avanceret)	117
11.10 Skæring mellem en cirkel og en ret linje	119
11.10.1 Alternativ metode	120
11.10.2 Eksempel 1	121
11.10.3 Eksempel 2	122
12 Deskriptiv statistik: Ikke grupperede observationer	123
12.1 Rå data	123
12.2 Optalte data	124
12.3 Pindediagram, trappekurve og deskriptorer	126
12.4 Boksplot af ikke-grupperede observationssæt	128
12.5 Outliers	129
12.6 Sammenligning af boksplot	129
12.7 Sammenligning af 3 eller flere boksplots	130
13 Deskriptiv statistik: Grupperede observationer	131
13.1 Rå data	131
13.2 Grupperede data	132
13.3 Histogram, sumkurve og deskriptorer	133
13.4 Boksplot af grupperede observationssæt	135
14 Binomialfordelingen	136
14.1 Opbygning af binomialfordelingen ganske kort	136
14.2 Binomialfordelingen – definition	139
14.3 Eksempler	141
14.3.1 Eksempel 1	142
14.3.2 Eksempel 2 – Tips13	144
15 Binomialtest	146
15.1 Ensided test	146
15.2 Tosided test	148
15.3 Fejl af 1. og 2. art	149
15.4 Oversigt	151
16 Normalfordelingen	152
16.1 Data	152
16.2 Gruppering af data, histogram og sumkurve	152
16.3 Normalfordelt stokastisk variabel	155
16.4 Eksempel	158
16.5 Normalapproximationen	160

1 Løsning af ligninger i Maple

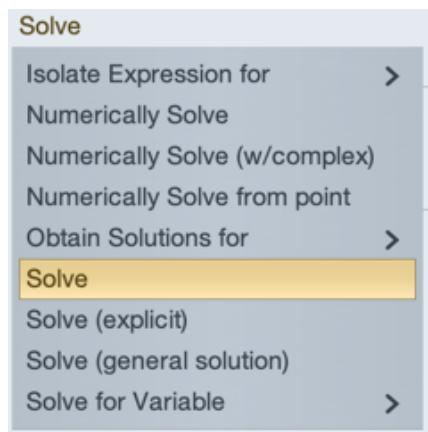
1.1 Solve-kommandoen og førstegradslikninger

Hvis du vil løse en konkret ligning som fx $3x + 5 = 7$, så kan du vælge mellem

1.1.1 Metode 1 (kontekstmenuen)

Med markøren efter placeret efter ligningen (indtastet i Math-mode) vælger du **Solve** i kontekstmenuen (sidepanelet til højre) og derefter Solve i den liste, der kommer frem:

$$3x + 5 = 7$$



$$3x + 5 = 7 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ x = \frac{2}{3} \right\}$$

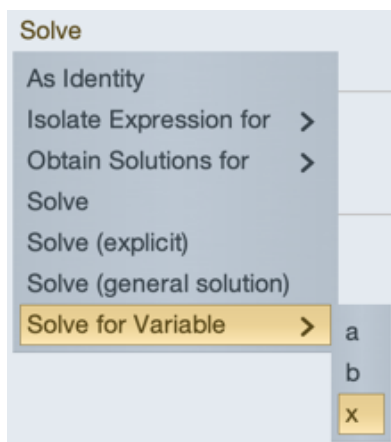
Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det galt

$$a \cdot x + b = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{a = a, b = -a \cdot x, x = x\}$$

Maple ved jo ikke, hvad der er den ubekendte.

Læg mærke til de krøllede parenteser: det er Maples måde at håndtere mængder på: Løsningen indeholder 3 elementer (i dette tilfælde ligninger): $a = a$, $b = -a \cdot x$ og $x = x$. Det skal forstås som en parametrisering af løsningen, hvor a og x kan antage vilkårlige værdier, mens b er fastlagt som produktet $-a \cdot x$.

Du er her nødt til at fortælle Maple, hvilken variabel du vil løse med hensyn til. Det gør du som ovenfor, men vælger i stedet **Solve for Variable** $> x$ i listen:



$$a \cdot x + b = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[\left[x = -\frac{b}{a} \right] \right]$$

– eller du kan i listen vælge **Obtain Solution for > x**:

$$a \cdot x + b = 0 \xrightarrow{\text{solutions for } x} -\frac{b}{a}$$

afhængigt af, hvordan du vil have løsningen præsenteret.

Endelig kan du benytte **Isolate Expression for > x**:

$$a \cdot x + b = 0 \xrightarrow{\text{isolate for } x} x = -\frac{b}{a}$$

Du skal dog være meget forsigtig med den sidste, idet den kun giver én løsning. Det er intet problem her, men kan være det i andre sammenhænge, hvor der er flere løsninger

1.1.2 Metode 2 (solve-kommandoen)

Her skriver du kommandoen (i en Math-mode)

$$\text{solve}(3x + 5 = 7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1.1)$$

Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det galt

$$\text{solve}(a \cdot x + b = 0)$$

$$\{a = a, b = -a x, x = x\} \quad (1.2)$$

Maple ved jo ikke, hvad der er den ubekendte. Du er nødt til at fortælle Maple, hvilken variabel du vil løse med hensyn til (her x):

$$\text{solve}(a \cdot x + b = 0, x)$$

$$-\frac{b}{a} \quad (1.3)$$

Du kan få skrevet resultatet som en mængde ved fx at tilføje mængdeparensen omkring de ubekendte:

$$\text{solve}(a \cdot x + b = 0, \{x\})$$

$$\left\{ x = -\frac{b}{a} \right\} \quad (1.4)$$

1.1.3 Metode 3 (smart popup)

Indtast ligningen og afslut med Enter

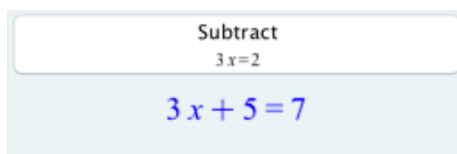
$$3x + 5 = 7$$

$$3x + 5 = 7 \quad (1.5)$$

Marker 5-tallet i ligningen, og hold markøren over 5-tallet:

$$3x + 5 = 7$$

Allerøverst i sidepanelet til højre ser du, at Maple foreslår at trække 5 fra på begge sider af ligningen. Resultatet af dette vises også med småt):



Subtract
 $3x=2$
 $3x+5=7$

Klik på **Subtract** - knappen for at acceptere. Maple svarer med

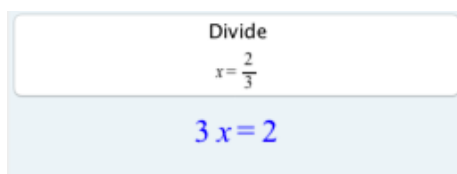
$$3x+5=7$$

$$3x+5=7 \quad (1.6)$$

subtract 5 from both sides →

$$3x=2 \quad (1.7)$$

Marker nu 3-tallet. Her foreslår Maple at dividere med 3. Klik på **Divide** - knappen for at acceptere



Divide
 $x=\frac{2}{3}$
 $3x=2$

Herefter har du løsningen:

$$3x+5=7$$

$$3x+5=7 \quad (1.8)$$

subtract 5 from both sides →

$$3x=2 \quad (1.9)$$

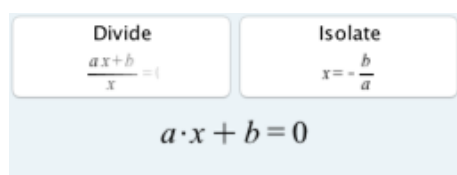
divide both sides by 3 →

$$x=\frac{2}{3} \quad (1.10)$$

Hvis du vil løse en symbolsk ligning på denne form, så går det let og smertefrit. Indtast ligningen, tast Enter og marker x:

$$a \cdot x + b = 0$$

$$ax+b=0 \quad (1.11)$$



Divide
 $\frac{ax+b}{x} = \{$
Isolate
 $x = -\frac{b}{a}$
 $ax+b=0$

Vælg **Isolate**, og ligningen er løst

$$a \cdot x + b = 0$$

$$ax+b=0 \quad (1.12)$$

isolate for x →

$$x = -\frac{b}{a}$$

Du kan naturligvis isolere a og b tilsvarende.

Til mere komplicerede ligninger kan denne metode ikke anbefales!

1.2 To ligninger med to ubekendte

Skal du løse et system af to ligninger med to ubekendte, fx

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 6x + y = 10 \end{cases}$$

kobler du de to ligninger sammen med $\{ , \}$ i solve-kommandoen:

`solve({3 x + 4 y = -3, 6 x + y = 5}, {x, y})`

$$\left\{ x = \frac{23}{21}, y = -\frac{11}{7} \right\} \quad (1.13)$$

- så simpelt kan det gøres!

Faktisk kan du nøjes med skrive

`solve({3 x + 4 y = -3, 6 x + y = 5})`

$$\left\{ x = \frac{23}{21}, y = -\frac{11}{7} \right\} \quad (1.14)$$

idet der her kun er to variable, nemlig x og y . Hvis der indgår flere variable, skal du fortælle Maple, hvilke variable, der skal løses med hensyn til – og det er netop det, du gør, ved at indtaste $\{x, y\}$.

Du kan også løse to ligninger med to ubekendte ved at skrive de to ligninger med et **komma** imellem, klikke og blot vælge **Solve > Solve** i kontekstmenuen

$$3x + 4y = -3, 6x + y = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ x = \frac{23}{21}, y = -\frac{11}{7} \right\}$$

1.3 Ingen løsninger eller uendeligt mange løsninger

Ingen løsninger:

Har en ligning eller et ligningssystem ingen løsninger – eller kan Maple ikke finde nogen – så returneres ingenting: Mere præcist den tomme udtryksfølge returneres (NULL).

`solve(3 x - 4 = 3 x + 5, x)`

OBS: Bruger du funktionen *nulpunkter* fra Gym-pakken, så kan du se, hvis der ingen løsning er:

`with(Gym) :`

`nulpunkter(3 x - 4 = 3 x + 5)`

`[ ]` (1.15)

Alternativt kan du klikke på ligningen og vælge **Gym > Solve > nulpunkter** i kontekstmenuen:

$$3x - 4 = 3x + 5 \xrightarrow{\text{nulpunkter}} []$$

Uendeligt mange løsninger:

$$\text{solve}(3x + 4 = 3x + 4, x)$$

$$x \quad (1.16)$$

Her returnerer Maple blot x . Det skal forstås på den måde, at alle x er løsninger til ligningen. Måske er det nemmere at se, hvis vi sætter krøllede parenteser om x :

$$\text{solve}(3x + 4 = 3x + 4, \{x\})$$

$$\{x = x\} \quad (1.17)$$

Et eksempel på et ligningssystem med uendeligt mange løsninger er

$$\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 6x + 4y = -4 \end{cases}$$

$$\text{solve}(\{3x + 2y = -2, 6x + 4y = -4\}, \{x, y\})$$

$$\left\{x = x, y = -\frac{3x}{2} - 1\right\} \quad (1.18)$$

Dette skal tolkes på den måde, alle løsninger kan udtrykkes som talpar på formen $\left(x, -\frac{3}{2}x - 1\right)$, hvor x kan vælges frit.

1.4 Andengradsligninger

1.4.1 Løsning med solve

Hvis diskriminanten $d > 0$, går løsning af en andengradsligning helt af sig selv (klik og vælg **Solve** > **Solve** i kontekstmenuen):

$$6x^2 + 7x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{1}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{5}{3}\right\}$$

Hvis diskriminanten $d = 0$, bliver løsningen skrevet to gange:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}, \{x = 1\}$$

Almindeligvis er det ligegyldigt, men hvis det irriterer dig at se samme løsning skrevet flere gange, så kan du undgå dette ved at tilføje en *option* i solve-kommandoen

$$\text{solve}(x^2 - 2x + 1 = 0, \{x\}, \text{DropMultiplicity} = \text{true})$$

$$\{x = 1\} \quad (1.19)$$

Hvis diskriminanten $d < 0$, har ligningen ingen reelle løsninger, men alligevel finder Maple to (komplekse) løsninger:

$$x^2 + x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}$$

Du kan undgå de komplekse løsninger på flere måder. Det bedste i forbindelse med andengradsligninger er, at du først finder diskriminanten. Hvis denne er negativ, konkluderer du, at der ingen reelle løsninger findes, og undgår herved at bruge solve.

$$\text{discrim}(x^2 + x + 2, x) = -7$$

Læg mærke til, at det kun er andengradsudtrykket du kan indsætte i *discrim* – indsætter du ligningen, så får du en fejl. Inden du indsætter, skal du altså sørge for, at andengradsligningen er på standardformen med 0 på højresiden.

1.4.2 Løsning med nulpunkter

Det er nemmere at benytte kommandoen *nulpunkter* fra Gym-pakken, idet den ikke returnerer komplekse løsninger.

Læg mærke til, at hvis Gym-pakken er indlæst, så vil du se et forslag efter ud har tastet 'nul':



tast **ESC** for at godkende forslaget.

with(Gym) :

$$\text{nulpunkter}(6x^2 + 7x - 5 = 0) = \left[-\frac{5}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

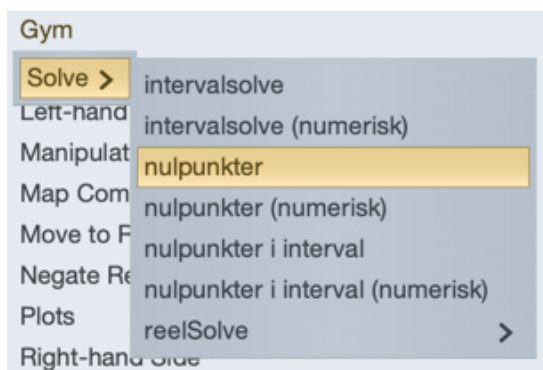
og hvis der kun er én løsning

$$\text{nulpunkter}(x^2 - 2x + 1 = 0) = [1]$$

og endelig, hvis ingen løsninger er:

$$\text{nulpunkter}(x^2 + x + 2 = 0) = []$$

I stedet for at bruge kommandoen *nulpunkter*, kan du klikke på ligningen og vælge **Gym > Solve > nulpunkter** i kontekstmenuen:



$$6x^2 + 7x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{nulpunkter}} \left[-\frac{5}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

2 Variabler i Maple

2.1 Navngivning

I Maple kan du navngive stort set hvad som helst – og siden hen benytte navnet som reference. Der er dog et par helt grundlæggende regler, der skal overholdes:

1. **Navnet skal starte med et bogstav.**

Det betyder ikke noget, om det er et stort eller et lille bogstav, og det må såmænd også gerne være et græsk bogstav. Det er vigtigt at bemærke, at Maple skelner mellem store og små bogstaver.

2. **Reserverede kommandoer må ikke benyttes.**

Maple gør opmærksom på dette med fejlmeldingen (i lyserødt)

'Error, attempting to to assign to `<name>` which is protected'

Det kan du reparere ved at definere din variabel som lokal.

2.2 Definition af en variabel mm.

Navngivning sker med `:=` (eller ved at benytte **Assign to a Name** fra kontekstmenuen).

Vil du fx definere en variabel a med værdien 7, så skriver du

$a := 7$

$a := 7$ (2.1)

Og først når du taster **Enter**, defineres variablen.

Du kan følge dine variabler i paletten **Variables**:

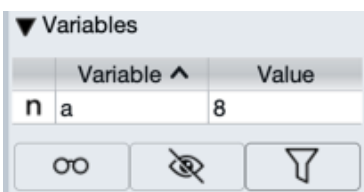


▼ Variables	
Variable ^	Value
n a	7

Below the table are three icons: a pair of glasses, an eye with a slash, and a funnel.

Hvis du ændrer værdien af a , vil det straks kunne ses i **Variables**-paletten. Prøv fx i definitionen ovenfor at ændre værdien af a til 8 — **husk, at variablen ikke er defineret før du afslutter med Enter.**

Herefter skulle **Variables** paletten gerne se sådan ud:



▼ Variables	
Variable ^	Value
n a	8

Below the table are three icons: a pair of glasses, an eye with a slash, and a funnel.

Definer nu variablerne b og c ved (nedenfor går vi ud fra, at du har ændret værdien af a til 8):

$b := 5$

$b := 5$ (2.2)

$c := a + b$

$c := 13$ (2.3)

og følg med i, hvad der sker i **Variables** paletten.

Prøv i **(2.1)** at ændre værdien af a til fx 10 (husk at taste **Enter** for at genberegne), og hold øje med **Variables**-paletten. Du vil se, at værdien af a ændres, men ikke værdien af c . Det sker først, når du genberegner linje **(2.3)**.

▼ Variables		
	Variable ^	Value
n	a	10
n	b	5
n	c	13

Hvis du ændrer i en definition af en variabel, er det meget vigtigt, at du får opdateret alle definitioner og beregninger, der er afhængige af den ændrede variabel. Her er et par fif til, hvordan du sikrer dette:

1. Er det blot et par enkelte definitioner og beregninger, der er afhængige af ændringen, er det hurtigste at genberegne de enkelte udtryk ved at klikke på dem og taste Enter.
2. Er der flere definitioner og beregninger i et afgrænset område, der er afhængige af ændringen, markeres hele området, og der

trykkes på knappen , som du finder i **Home**-fanebladet.

3. Er der mange ændringer spredt i arket, vil en genberegning af hele arket være det hurtigste. Tryk på



hurtigste. Tryk på

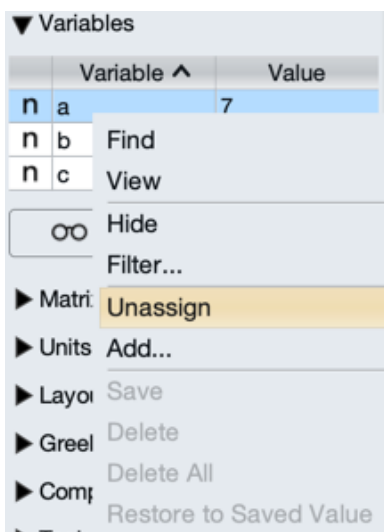


2.3 Rens en variabel

Hvis a har en værdi og du prøver at løse en ligning som fx $3a + 5 = 7$ ved hjælp af **Solve** i kontekstmenuen, vil du opdage, at **Solve** slet ikke dukker op i kontekstmenuen.

For at kunne løse denne ligning er du nødt til at rense a , dvs. sørge for, at a ikke har nogen værdi tildelt:

Højreklik (mac: ctrl+klik) på a i **Variables** paletten og vælg **Unassign** i menuen:



a er herefter ikke længere med på listen, og kan benyttes som formel variabel (dvs. en variabel, som ikke har nogen værdi).

Vil du have det til at fremgå af dit dokument, at du har rensset variablen a , er kommandoen

$a := 'a'$

$$a := a \quad (2.4)$$

eller

`unassign ('a')`

hvor du også kan angive flere variabler, der skal renses, ved

`unassign ('a','b','c')`

Du kan rense alle variabler på én gang:

Klik på den første variabel i **Variables** paletten og Shift+klik på den sidste, så alle variabler er markerede. Højreklik i det markerede (mac: ctrl+klik), og vælg **unassign** fra menuen.



Du kan også rense alle variabler i dit dokument ved at trykke på knappen **Restart Kernel** i **Home**-fanebladet, eller ved at bruge kommandoen `restart`. I begge tilfælde renses alle variabler (indlæste pakker skal genindlæses).

2.4 Indeks på variable

Du kan lave indeks på variabler på to måder:

literal indeks:

Hvis du ønsker, at indekset skal være en del af variabelens navn, fx v_{start} , hvor 'start' står med sænket skrift, så skal du benytte et såkaldt **literal index**, og det kommer til at se sådan ud (med værdien 5 tildelt):

$v_{start} := 5$

$$v_{start} := 5 \quad (2.5)$$

Til at skrive v_{start} kan du enten benytte skabelonen i **Expressions** paletten  eller benytte genvejen `v__start`, hvor `__` er to gange understreg.

Selvom `start` er navnet på en variabel med en værdi tildelt, kan du alligevel definere v_{start} :

$start := 1$

$$start := 1 \quad (2.6)$$

$v_{start} := 5$

$$v_{start} := 5 \quad (2.7)$$

vektorindeks:

Hvis du fx har en liste defineret ved

$L := [5, 6, 7, 8]$

$$L := [5, 6, 7, 8] \quad (2.8)$$

- og du gerne vil have fat på det 3. element i listen, så skriver du

$$L_3 \quad 7 \quad (2.9)$$

Her er indeks (altså 3-tallet) lavet med skabelonen  i **Expressions** paletten.

Der findes også her en genvej:

På en pc laves indekset med Ctrl+(Shift)+_ (du skal have 3 taster i sving for at lave indekset: Hold Ctrl og Shift nede samtidigt og tryk på _ tasten).

På en mac taster du i stedet cmd+alt+B, hvor du holder cmd- og alt-tasten nede og trykker på B-tasten.

Hvis du tildeler en værdi til L_3 , så vil værdien af L ændres tilsvarende

$$L_3 := 10 \quad L := [5, 6, 10, 8] \quad (2.10)$$

$$L \quad [5, 6, 10, 8] \quad (2.11)$$

Hvis du prøver at navngive som under literal indeks:

$$start := 1 \quad start := 1 \quad (2.12)$$

$$L_{start} \quad 5 \quad (2.13)$$

Her bliver start beregnet til 1, og det første element i tabellen L udskrives.

Prøv så med

$$L_{slut} \quad [5, 6, 10, 8]_{slut} \quad (2.14)$$

Her har $slut$ ikke nogen værdi tildelt, men skulle det før eller siden få en værdi, så ved Maple hvad den skal gøre.

Læg mærke til, at L bliver beregnet og indsat i udtrykket L_{slut} .

2.5 Brug af indeks

Du kan navngive mangt og meget i Maple – fx ligninger. Her benytter vi navnene $lign_1$ og $lign_2$ for de to ligninger (og literal index er benyttet):

$$lign_1 := 3x + 5y = 7$$

$$lign_1 := 3x + 5y = 7 \quad (2.15)$$

$$lign_2 := -2x + 1y = 12$$

$$lign_2 := -2x + y = 12 \quad (2.16)$$

$$\text{solve}(\{lign_1, lign_2\}, \{x, y\})$$

$$\left\{x = -\frac{53}{13}, y = \frac{50}{13}\right\} \quad (2.17)$$

Du kan også navngive løsningen, fx:

$$L := \text{solve}(\{lign_1, lign_2\}, \{x, y\})$$

$$L := \left\{x = -\frac{53}{13}, y = \frac{50}{13}\right\} \quad (2.18)$$

Hvis du vil have de enkelte løsninger trukket ud af L sker dette ved at benytte vektorindeks:

$$L_1$$

$$x = -\frac{53}{13} \quad (2.19)$$

Tag et kig på **Variables**-paletten for at se, hvordan variabler, navngivne ligninger og en løsning er repræsenteret.

▼ Variables		
	Variable ^	Value
{}	L	{x = -53/13, ...
=	lign__1	3*x+5*y = 7
=	lign__2	-2*x+y = 12
n	start	1
n	v__start	5

Piktogrammerne i venstre side kan tolkes som: **n** en numerisk variabel, **{}** en mængde og **=** en ligning.

3 Reduktion af udtryk

3.1 Saml led med collect

Maple reducerer visse udtryk helt automatisk. Det gælder fx taludtryk:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + 5 = \frac{59}{10}$$

Men også visse symbolske udtryk - fx

$$4 \cdot a + 3 b - 7(a + b) = -3 a - 4 b$$

men i udtrykket (hvor vi i ovenstående udtryk har erstattet 4-tallet med et k , sker der kun noget med b 'erne – ikke med a 'erne (husk at skrive et gangetegn mellem k og a , ellers opfatter Maple ka som en variabel):

$$k \cdot a + 3 b - 7(a + b) = a k - 7 a - 4 b$$

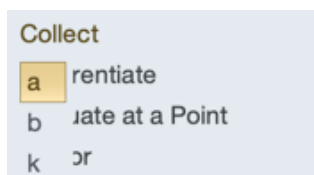
I dette udtryk kan a jo sættes uden for en parentes, altså $(k - 7) \cdot a - 4 b$, men det gør Maple ikke automatisk. Og det er ikke helt klart, hvad man skal gøre for at få Maple til at samle a 'erne.

Klik på udtrykket:

$$k \cdot a + 3 b - 7(a + b)$$

$$k a - 7 a - 4 b \quad (3.1)$$

Så kommer en kontekstmenu med en liste over alt, der er relevant at gøre ved udtrykket. Vælg her **Collect > a**



$$k \cdot a + 3 b - 7(a + b) \stackrel{\text{collect w.r.t. } a}{=} (k - 7) a - 4 b$$

3.2 Gang ind i parenteser med expand

Maple vil automatisk gange visse parenteser ud – fx hvis der står tal foran, og automatisk reducere udtrykket mest muligt

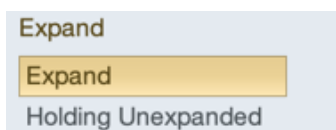
$$3(a + b) + 7(a - 4 b) = 10 a - 25 b$$

Dette sker ikke i et udtryk som fx

$$(5 a + 2 b) \cdot (a - b) = (5 a + 2 b) (a - b)$$

Her skal du hjælpe til.

Klik på udtrykket og vælg **Expand** i kontekst-menuen. Så vil parenteserne blive ganget ud:



$$(5 a + 2 b) \cdot (a - b) \stackrel{\text{expand}}{=} 5 a^2 - 3 a b - 2 b^2$$

3.3 Sæt uden for parentes med factor

Hvis du vil have a sat uden for parentes i udtrykket $a + a \cdot b$, skal du bruge **Factor** fra kontekstmenuen:

$$a + a \cdot b \stackrel{\text{factor}}{=} a (b + 1)$$

Factor er uhyre effektiv, og kan klare næsten enhver faktorisering.

Lad os prøve, om vi kan komme tilbage i udregningen vi lavede under *expand*:

$$(5a + 2b) \cdot (a - b) \stackrel{\text{expand}}{=} 5a^2 - 3ab - 2b^2$$

$$5a^2 - 3ab - 2b^2 \stackrel{\text{factor}}{=} (5a + 2b)(a - b)$$

– og det gik da meget godt.

3.4 Sæt på fælles brøkstreg med simplify

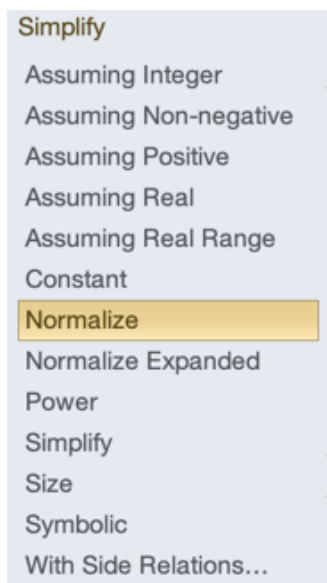
Simple brøker – herunder talbrøker – reduceres automatisk:

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6}$$

Men der er ingen automatisk reduktion i et udtryk som

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Hvis du vil have brøkerne sat på fælles brøkstreg skal du fx bruge **Simplify > Normalize** fra kontekst-menuen:



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{normalize}} \frac{b+a}{ba}$$

Simplify > Simplify ville være et oplagt valg her, men virker ikke her, idet udtrykket på høresiden er faktisk mere kompliceret end det oprindelige udtryk. Nok er der kun én brøk på højresiden, men skal der indsættes konkrete værdier for a og b , skal der kun foretages 2 indsættelser i venstresiden, mens højresiden kræver 4 indsættelser. I den forstand er venstresiden simple.

3.5 Reduktion af eksponenter med simplify

Simple taleksponenter bliver reduceret automatisk, som fx i

$$\frac{x^3 y^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} y^2} = x^{19/6} y^{1/3}$$

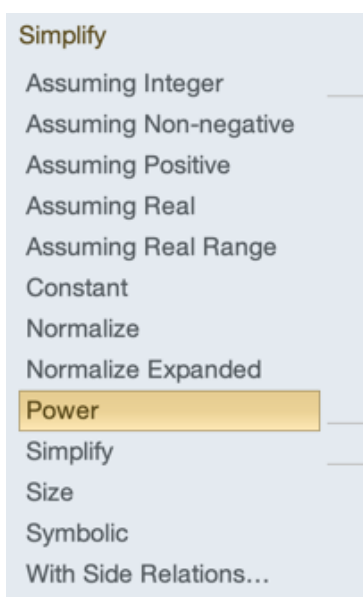
men ikke, hvis der er bogstaver som eksponenter:

$$\frac{x^a \cdot y^b \cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c \cdot y^2} = \frac{x^a y^b x^{\frac{a}{2}}}{x^c y^2}$$

Klik på

$$\frac{x^a \cdot y^b \cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c \cdot y^2}$$

og vælg **Simplify > Power** i kontekst-menuen



Så vil alle (næsten da) potensregneregler være tilgængelige:

$$\frac{x^a \cdot y^b \cdot x^{\frac{a}{2}}}{x^c \cdot y^2} \xrightarrow{\text{simplify power}} y^{b-2} x^{\frac{3a}{2}-c}$$

Prøver du **Simplify > Power** på udtrykket

$$(x \cdot y)^c$$

sker der ingen ting. Prøv!

Her gælder jo reglen, at $(x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c$, men du skal huske på, at her kræves, at $x > 0$ og at $y > 0$. Vælger du i stedet **Simplify > Assuming Positive**, så sker der noget!

$$(x \cdot y)^c \xrightarrow{\text{assuming positive}} x^c y^c$$

4 Rentesregning

4.1 Renteformlen

Til simpel kapitalfremskrivning benyttes renteformlen

$$K = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

– hvor

K er slutkapitalen

K_0 er startkapitalen

r er renten (skrevet som et decimaltal – uden brug af %-tegnet)

n er antallet af terminer.

Hvis vi i renteformlen kender 3 af størrelserne K , K_0 , r og n , kan vi beregne os frem til den sidste. Så i princippet kan opgaver i renteformlen varieres på 4 måder. Nedenfor er der eksempler på disse:

4.1.1 Eksempel 1 (K bestemmes)

500 kr. indsættes på en konto til 3% pr. termin.

Hvad er beløbet vokset til på 12 terminer?

Vi indsætter i renteformlen: K er den ukendte størrelse, $K_0 = 500$, $r = 0.03$ og $n = 12$.

$$K = 500 \cdot (1 + 0.03)^{12}$$

$$K = 712.8804435$$

(4.1)

Altså vil der stå 712.88 kr. på kontoen efter 12 terminer.

4.1.2 Eksempel 2 (K_0 bestemmes)

Et beløb er på 24 terminer vokset til 4998.90 kr. Renten har været 5% pr. termin.

Hvor stort et beløb blev oprindeligt indsat?

Her er K_0 er den ukendte størrelse, $K = 4998.90$, $r = 0.05$ og $n = 24$.

Vi sætter ind i renteformlen:

$$4998.90 = K_0 \cdot (1 + 0.05)^{24} \xrightarrow{\text{solve}} \{K_0 = 1549.998477\}$$

Der blev oprindeligt indsat 1550 kr.

4.1.3 Eksempel 3 (r bestemmes)

Et beløb på 6500 kr. er vokset til 11402.48 kr. ved 20 rentetilskrivninger.

Hvad har renten været?

Her er r er den ukendte størrelse, $K = 11402.48$, $K_0 = 6500$ og $n = 20$.

Vi sætter ind i renteformlen:

$$11402.48 = 6500 \cdot (1 + r)^{20} \xrightarrow{\text{solve}} -2.028500005, 0.02850000496$$

Her vil brug af `Solve > Solve`, udover den ønskede løsning, returnere en masse snask. Det skyldes, at Maple lever i en større verden end vi kender til, så for at undgå den slags, så bruger vi her **`Solve > Numerically Solve`**.

Hvis du foretrækker at skrive det med en kommando, så er syntaksen

$$\text{fsolve}(11402.48 = 6500 \cdot (1 + r)^{20})$$

$$-2.028500005, 0.02850000496 \quad (4.2)$$

Vi får to løsninger ud, hvor den negative umiddelbart kan ignoreres. Så konklusionen er, at renten har været 2.85%.

4.1.4 Eksempel 4 (n bestemmes)

1000 kr. er vokset til 2025.82 kr. ved et antal rentetilskrivninger på 4%.

Hvor mange rentetilskrivninger er der foretaget?

Her er n er den ukendte størrelse, $K = 2025.82$, $K_0 = 1000$ og $r = 0.04$.

Vi sætter ind i renteformlen:

$$2025.82 = 1000 \cdot (1 + 0.04)^n \xrightarrow{\text{solve}} \{n = 18.00004386\}$$

Der har således været 18 rentetilskrivninger.

4.2 Annuitetsformlen

Til beregning af slutbeløbet ved en opsparing har vi annuitetsformlen:

$$A = y \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

– hvor

A er sluttbeløbet

y er indbetalingen pr. termin

r er renten (skrevet som et decimaltal – uden brug af %-tegnet)

n er antallet af terminer.

Hvis vi i annuitetsformlen kender 3 af størrelserne A , y , r og n , kan vi beregne os frem til den sidste. Så i princippet kan opgaver i annuitetsformlen også varieres på 4 måder. Nedenfor er der eksempler på disse:

4.2.1 Eksempel 1 (A bestemmes)

På en konto indsættes hver måned 500 kr. i 4 år. Den månedlige rente er 1.25%.

Hvor meget står der på kontoen efter 4 år?

Her er $y = 500$, $r = 0.0125$ og $n = 48$. Vi sætter ind i annuitetsformlen

$$A = 500 \cdot \frac{(1 + 0.0125)^{48} - 1}{0.0125}$$

$$A = 32614.19412 \quad (4.3)$$

På kontoen står der efter 4 år beløbet 32614.19 kr.

4.2.2 Eksempel 2 (y bestemmes)

Hvor stor skal indbetalingen være, hvis renten er 8% pr. termin, antallet af indbetalinger er 30, og saldoen skal være 500000 kr. efter sidste indbetaling?

Her er $A = 500000$, $r = 0.08$ og $n = 30$. Indbetalingen y er den ukendte størrelse her. Vi skal løse en ligning:

$$500000 = y \cdot \frac{(1 + 0.08)^{30} - 1}{0.08} \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 4413.716694\}$$

Dette viser, at du skal indbetale 4413.72 kr. pr. termin.

4.2.3 Eksempel 3 (r bestemmes)

Et beløb på 5000 kr. opspares ved 24 månedlige indbetalinger på 200 kr.

Hvad er den månedlige rente?

Her er $A = 5000$, $y = 200$ og $n = 24$. Ligningen, vi skal løse, volder problemer for Solve > Solve, så benyt **Solve > Numerically Solve**:

$$5000 = 200 \cdot \frac{(1 + r)^{24} - 1}{r} \xrightarrow{\text{solve}} 0.003530086202$$

Dvs., at den månedlige rente er ca. 0.35%

4.2.4 Eksempel 4 (n bestemmes)

Hvor lang tid tager det at spare 100000 kr. op ved en månedlig indbetaling på 3000 kr. og en månedlig rente på 0.5% ?

Her er $A = 100000$, $y = 3000$ og $r = 0.005$.

$$100000 = 3000 \cdot \frac{(1 + 0.005)^n - 1}{0.005} \xrightarrow{\text{solve}} \{n = 30.90714724\}$$

Altså ca. 31 måneder.

4.3 Gældsformlen

Formlen til beregning af gældsafvikling er denne

$$G = y \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

– hvor

G er den gæld, der skal afvikles (hovedstolen)

y er ydelsen pr. termin

r er renten (skrevet som et decimaltal – uden brug af %-tegnet)

n er antallet af terminer.

4.3.1 Eksempel 1 (G bestemmes)

Hvor dyr en bil kan man købe, hvis man er i stand til at betale 3000 kr. hver måned i 8 år og renten er 0.5% pr. måned?

Her er $y = 3000$, $r = 0.005$ og $n = 96$.

$$G = 3000 \cdot \frac{1 - (1 + 0.005)^{-96}}{0.005}$$

$$G = 228285.6548 \quad (4.4)$$

Så der kan lånes 228286 kr.

4.3.2 Eksempel 2 (y bestemmes)

Et lån på 500000 kr. med en terminsrente på 6% skal afvikles over 30 terminer.

Hvor stor en ydelse skal der betales?

Her er $G = 500000$, $r = 0.06$ og $n = 30$

$$500000 = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.06)^{-30}}{0.06} \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 36324.45575\}$$

Der skal altså betales 36324.45 kr. pr. termin.

4.3.3 Eksempel 3 (r bestemmes)

Et lån på 4295 kr. skal afdrages over 24 måneder med en ydelse på 256 kr. pr. måned.

Hvad er den månedlige rente ?

Her er $G = 4295$, $y = 256$ og $n = 24$. Ligningen, vi skal løse, volder problemer for Solve > Solve, så benyt **Solve > Numerically Solve**:

$$4295 = 256 \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-24}}{r} \xrightarrow{\text{solve}} 0.03087315801$$

Den månedlige rente er omkring 3.1%.

4.3.4 Eksempel 4 (n bestemmes)

I forbindelse med køb af en ny bil til 350.000 kr vil man gerne vide, hvor mange måneder der skal afdrages på lånet, når man er i stand til at betale 3500 kr. pr. måned og renten er 0.45% pr. måned

Her er $G = 350000$, $y = 3500$ og $r = 0.0045$.

$$350000 = 3500 \cdot \frac{1 - (1 + 0.0045)^{-n}}{0.0045} \xrightarrow{\text{solve}} \{n = 133.1513616\}$$

Der skal afdrages i 133 måneder, hvilket er 11 år og en måned.

4.4 Afvikling af gæld - amortisering

Når man opretter et lån i banken, er banken forpligtet til at fremstille en oversigt, der termin efter termin viser, hvad der betales i rente, hvad der betales i afdrag og endelig, hvad restgælden er. Det kan blive en ganske omfattende oversigt, specielt hvis der er tale om månedlige ydelser.

Lad os se et eksempel på, hvordan sådan en tabel laves:

Vi opretter et lån på 100000 kr. til en rente 0.7% pr termin, og vi skal hver termin betale en ydelse på 1500 kr..

Ved afslutningen af første termin skal vi betale den første ydelse. Med denne ydelse betaler vi de renter, der bliver tilskrevet, og det, der måtte være tilbage er et afdrag på lånet.

$$100000 \cdot 0.007 = 700.000$$

Ydelsen i hver termin er 1500 kr., så når renterne er betalt, er der 800 kr. tilbage til afdrag. Restgælden er således 99200 kr.

$$99200 \cdot 0.007 = 694.400 \quad 1500 - 694.40 = 805.60 \quad 99200 - 805.60 = 98394.40$$

Alt dette kan organiseres pænt i en tabel – og hertil er i Gym-pakken kommandoen *amort*, der klarer dette på et øjeblik. Med vores eksempel vil det se sådan ud:

with(Gym) :
amort(100000, 1500, 0.7) :

Termin	Ydelse	Rente	Afdrag	Balance
0	0	0	-100000	100000
1	1500	700.000000	800.000000	99200.00000
2	1500	694.400000	805.600000	98394.40000
3	1500	688.760800	811.239200	97583.16080
4	1500	683.0821256	816.9178744	96766.24293
5	1500	677.3637005	822.6362995	95943.60663
6	1500	671.6052464	828.3947536	95115.21188
7	1500	665.8064832	834.1935168	94281.01836
8	1500	659.9671285	840.0328715	93440.98549
9	1500	654.0868984	845.9131016	92595.07239

Med scroll-baren til højre kan du bladre ned og se, at lånet er afviklet efter 91 terminer og i den sidste termin skal der kun betales 173.30 kr. i ydelse.

Der er flere kommandoer til låneafvikling i Gym-pakken. Hvis du fx vil vide, hvordan fordelingen mellem rente og afdrag ser ud i den 12. termin – og hvad restgælden er, så er kommandoerne

$$\text{renteAmort}(100000, 1500, 0.7, 12) = 636.1980840$$

$$\text{afdragAmort}(100000, 1500, 0.7, 12) = 863.8019160$$

$$\text{balanceAmort}(100000, 1500, 0.7, 12) = 90021.63865$$

Med disse kommandoer kan du også hurtigt regne ud, hvor meget der er betalt i rente fx i de første 12 terminer:

$$\text{renteAmort}(100000, 1500, 0.7, 1..12) = 8021.638638$$

– og helt tilsvarende for de øvrige. Disse tal kan du ikke finde i tabellen.

4.5 Alle renteberegninger i én ligning - TVM

For at kunne introducere TVM-ligningen, skal vi have nogle andre ord til at beskrive de størrelser, vi har brugt i rente-, annuitets- og gældsformlen – og det er de ord, de 'rigtige' finansfolk benytter.

I renteformlen har vi skrevet $K = K_0 \cdot (1 + r)^n$, hvor K_0 er startbeløbet og K er slutbeløbet. Her vil vi indføre betegnelserne:

NV – nutidsværdien, fx det beløb vi sætter til forrentning.

FV – fremtidsværdien, fx slutbeløbet af et beløb, vi har sat til forrentning.

Hermed ser renteformlen sådan ud:

$$FV = NV \cdot (1 + r)^n$$

Tilsvarende kan vi omforme annuitetsformlen, men må skal først have en ny betegnelse på banen for ydelsen:

PMT – ydelsen (fra engelsk Payment)

Hermed ser annuitetsformlen sådan ud ($NV = 0$, idet der står 0 kr. på kontoen ved første indbetaling):

$$FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Tilsvarende med gældsformlen (her er $FV = 0$, idet hele gælden skal afdrages)

$$NV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Endelig benyttes

R – renten i procent (uden procenttegn)

N – antal terminer.

Med disse nye betegnelser kan renteformlen skrives

$$FV = NV \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

og tilsvarende med de to andre.

TVM-ligningen ser sådan ud (du skal slet ikke bekymre dig om, hvordan man kommer frem til denne formel – og hvad B betyder):

$$NV \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N + PMT \cdot \left(\left(1 + \frac{R}{100}\right)^N - 1\right) \cdot \left(\frac{100}{R} + B\right) + FV = 0$$

Der er en meget vigtig detalje ved denne ligning, vi lige skal se på. Det gør vi ved undersøge, om vi kan finde renteformlen i TVM-ligningen:

I renteformlen er der ingen ydelser, så $PMT = 0$, gør TVM-ligningen meget simple:

$$NV \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N + FV = 0$$

men den matcher ikke ligningen:

$$FV = NV \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

vi fandt ovenfor, men samler vi alle led på venstre side, får vi

$$-NV \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N + FV = 0$$

så begynder det at ligne. Dog er der et minus foran NV , som ikke er i TVM-ligningen. Undersøger vi tilsvarende annuitetsformlen og gældsformlen vil der også i begge tilfælde mangle et minus.

Det har man klaret med denne snedige vedtægt:

at beløb, du skal betale, skal indtastes som negative tal. Det er jo en udgift for dig.

Kommandoen, du skal bruge, ligger i Gym-pakken og hedder såmænd *TVM*. Som input til *TVM* skal du angive værdierne af 4 af variableerne NV , FV , PMT , R , N for at kunne bestemme den sidste.

I nedenstående eksempler (som er præcis de samme som de 12 eksempler, vi har løst ovenfor) vil syntaksen til *TVM* kommandoen blive helt klar.

4.5.1 Eksempler (med simpel kapitalfremskrivning)

with(*Gym*) :

NV	-500
FV	
PMT	0
R	3
N	12

500 kr. indsættes på en konto til 3% pr. termin.

Hvad er beløbet vokset til på 12 terminer?

$TVM(NV=-500, PMT=0, R=3, N=12)$

$FV = 712.8804434$ (4.5)

Så beløbet er vokset til 712.88 kr.

NV	
FV	4998.90
PMT	0
R	5
N	24

Et beløb er på 24 terminer vokset til 4998.90 kr. Renten har været 5% pr. termin.

Hvor stort et beløb blev oprindeligt indsat?

$TVM(FV=4998.90, PMT=0, R=5, N=24)$

$NV = -1549.998477$ (4.6)

Den negative løsning betyder, at du skal betale 1500 kr.

NV	-6500
FV	11402.48
PMT	0
R	
N	20

Et beløb på 6500 kr. er vokset til 11402.48 kr. ved 20 rentetilskrivninger.

Hvad har renten været?

$$TVM(NV = -6500, FV = 11402.48, PMT = 0, N = 20)$$

$$R = 2.850000496 \quad (4.7)$$

Renten har været 2.85%

NV	-1000
FV	2025.82
PMT	0
R	4
N	

1000 kr. er vokset til 2025.82 kr. ved et antal rentetilskrivninger på 4%.

Hvor mange rentetilskrivninger er der foretaget?

$$TVM(NV = -1000, FV = 2025.82, PMT = 0, R = 4)$$

$$N = 18.00004386 \quad (4.8)$$

Der har således været 18 rentetilskrivninger.

4.5.2 Eksempler (med opsparing)

NV	0
FV	
PMT	-500
R	1.25
N	48

På en konto indsættes hver måned 500 kr. i 4 år. Den månedlige rente er 1.25%.

Hvor meget står der på kontoen efter 4 år?

$$TVM(NV = 0, PMT = -500, R = 1.25, N = 48)$$

$$FV = 32614.19412 \quad (4.9)$$

På kontoen står der efter 4 år beløbet 32614.19 kr.

NV	0
FV	500000
PMT	
R	8
N	30

Hvor stor skal indbetalingen være, hvis renten er 8% pr. termin, antallet af indbetalinger er 30, og saldoen skal være 500000 kr. efter sidste indbetaling?

$$TVM(NV = 0, FV = 500000, R = 8, N = 30)$$

$$PMT = -4413.716694 \quad (4.10)$$

Dette viser, at du skal indbetale 4413.72 kr. pr. termin.

NV	0
FV	5000
PMT	− 200
R	
N	24

Et beløb på 5000 kr. opspares ved 24 månedlige indbetalinger på 200 kr.

Hvad er den månedlige rente?

$$TVM(NV = 0, FV = 5000, PMT = -200, N = 24)$$

$$R = 0.3530086202 \quad (4.11)$$

Dvs., at den månedlige rente er ca. 0.35%

NV	0
FV	100000
PMT	− 3000
R	0.5
N	

Hvor lang tid tager det at spare 100000 kr. op ved en månedlig indbetaling på 3000 kr. og en månedlig rente på 0.5% ?

$$TVM(NV = 0, FV = 100000, PMT = -3000, R = 0.5)$$

$$N = 30.90714724 \quad (4.12)$$

Altså ca. 31 måneder.

4.5.3 Eksempler (med gældsafvikling)

NV	
FV	0
PMT	− 3000
R	0.5
N	96

Hvor dyr en bil kan man købe, hvis man er i stand til at betale 3000 kr. hver måned i 8 år og renten er 0.5% pr. måned?

$$TVM(FV = 0, PMT = -3000, R = 0.5, N = 96)$$

$$NV = 228285.6547 \quad (4.13)$$

Så der kan lånes 228286 kr.

<i>NV</i>	500000
<i>FV</i>	0
<i>PMT</i>	
<i>R</i>	6
<i>N</i>	30

Et lån på 500000 kr. med en terminsrente på 6% skal afvikles over 30 terminer.

Hvor stor en ydelse skal der betales?

$TVM(NV = 500000, FV = 0, R = 6, N = 30)$

$$PMT = -36324.45575 \quad (4.14)$$

Der skal altså betales 36324.45 kr. pr. termin.

<i>NV</i>	4295
<i>FV</i>	0
<i>PMT</i>	-256
<i>R</i>	
<i>N</i>	24

Et lån på 4295 kr. skal afdrages over 24 måneder med en ydelse på 256 kr. pr. måned.

Hvad er den månedlige rente ?

$TVM(NV = 4295, FV = 0, PMT = -256, N = 24)$

$$R = 3.087315801 \quad (4.15)$$

Den månedlige rente er omkring 3.1%.

<i>NV</i>	350000
<i>FV</i>	0
<i>PMT</i>	-3500
<i>R</i>	0.45
<i>N</i>	

I forbindelse med køb af en ny bil til 350.000 kr vil man gerne vide, hvor mange måneder der skal afdrages på lånet, når man er i stand til at betale 3500 kr. pr. måned og renten er 0.45% pr. måned

$TVM(NV = 350000, FV = 0, PMT = -3500, R = 0.45)$

$$N = 133.1513616 \quad (4.16)$$

Der skal afdrages i 133 måneder, hvilket er 11 år og en måned.

4.6 Leasing

Ved leasingaftaler er der det specielle, at den første ydelse skal falde ved leasingens start – i modsætning til almindelig låneafvikling, hvor første ydelse forfalder i slutningen af 1. termin.

Desuden kan man lave leasingaftaler, hvor gælden afdrages til en bestemt størrelse, som så skal forfalde på én gang ved leasingperiodens ophør.

Det, at første ydelse skal falde ved leasingens start, klares i TVM-ligningen ved at sætte $B = 1$. Som standard er $B = 0$. I Gym-pakken fungerer det ved, at man i stedet skriver $start = true$ for at sikre, at ydelser betales i starten af en termin.

Leasingaftaler med restgæld klares nemt ved at sætte FV lig med den aftalte restgæld – og ikke 0 som ved almindelig låneafvikling.

4.6.1 Eksempel (uden restgæld)

NV	1000000
FV	0
PMT	
R	0.51
N	60
$start$	true

En leasingaftale indgås for en maskine med en anskaffelsespris på 1000000 kr. over 60 måneder.

Hvor stor er den månedlige leasingydelse, når den månedlige rente er 0.51% ?

$TVM(NV = 1000000, FV = 0, R = 0.51, N = 60, start = true)$

$$PMT = -19290.26877 \quad (4.17)$$

Den månedlige leasingydelse er således 19290.27 kr.

Vi kan godt klare denne udregning med den sædvanlige gældsformel:

Da første ydelse y falder i det øjeblik leasingaftalen indgås, er det faktiske beløb, vi skal afdrage, $1000000 - y$ og perioden må så være 59 terminer:

$$1000000 - y = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.0051)^{-59}}{0.0051} \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 19290.26879\}$$

4.6.2 Eksempel (med restgæld)

NV	1000000
FV	-250000
PMT	
R	0.51
N	60
$start$	true

En leasingaftale med en restværdi på 250000 kr. indgås for en maskine med en anskaffelsespris på 1000000 kr. over 60 måneder.

Hvor stor er den månedlige leasingydelse, når den månedlige rente er 0.51% ?

$TVM(NV = 1000000, FV = -250000, R = 0.51, N = 60, start = true)$

$$PMT = -15736.23207 \quad (4.18)$$

Den månedlige leasingydelse er således 15736.23 kr.

Vi kan også klare denne udregning med den sædvanlige gældsformel, men det er noget mere kompliceret her:

Umiddelbart kunne man tro, at vi blot kunne trække den fremtidige restgæld (250000) fra nutidsværdien (1000000) og regne således

$$1000000 - 250000 - y = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.0051)^{-59}}{0.0051} \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 14467.70159\}$$

men der går ikke – vi kommer til at betale for lidt i ydelse. Vi skal huske på, at de 250000 kr. trækker renter i hele leasingperioden, så vores restgæld bliver da ifølge renteformlen

$$K = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

$$K = 250000 \cdot (1 + 0.0051)^{60}$$

$$K = 339231.6682 \quad (4.19)$$

Vi skal altså i stedet sætte $K = 250000$ og finde K_0 :

$$250000 = K_0 \cdot (1 + 0.0051)^{60} \xrightarrow{\text{solve}} \{K_0 = 184239.8745\}$$

Dvs., at vi skal trække 184239.87 fra nutidsværdien:

$$1000000 - 184239.87 - y = y \cdot \frac{1 - (1 + 0.0051)^{-59}}{0.0051} \xrightarrow{\text{solve}} \{y = 15736.23217\}$$

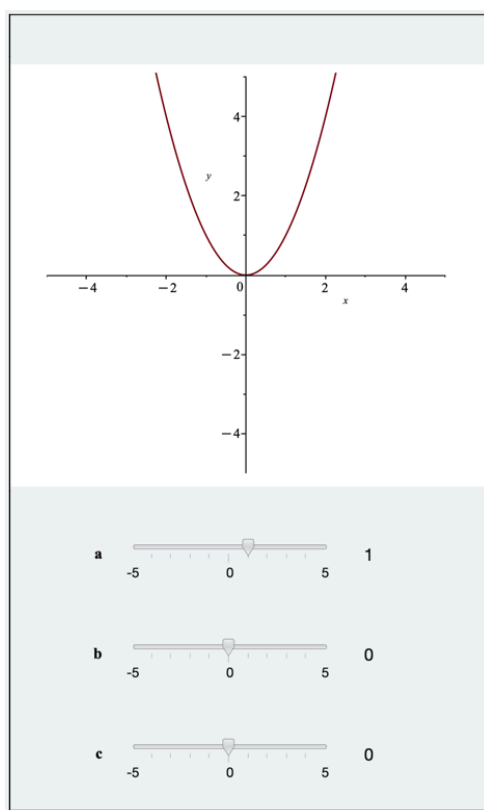
5 Andengradspolynomier og andengradsligninger

5.1 Udforsk andengradspolynomiet med Explorer Assistant

`Explore(plot( $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ), parameters = [ $a = -5 \dots 5$ ,  $b = -5 \dots 5$ ,  $c = -5 \dots 5$ ], initialvalues = [ $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ])`

Tast **Enter** efter ovenstående kommando (du skal først gøre linjen aktiv ved at ændre indstillingen 'Nonexecutable Math' til 'Math' inden du taster Enter. Du skifter indstillingen med Shift+F5).

Så vil dette vindue (med aktive skydere) komme frem:



Træk i skyderne, og følg nøje med i, hvad der sker med grafen.

Tip:

Hvis du vil studere, hvad der sker, hvis $-1 < a < 1$, så kan du erstatte a med $\frac{a}{10}$ i ovenstående kommando, og lade a -intervallet i løbe fra -10 til 10 .

Skriver du blot kommandoen

`Explore(plot( $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ ))`

Får du et vindue frem, hvor du selv kan indstille intervallerne for a , b og c . Du kan også vælge drejeknapper i stedet for skydepaneler.

5.2 Toppunktsbestemmelse

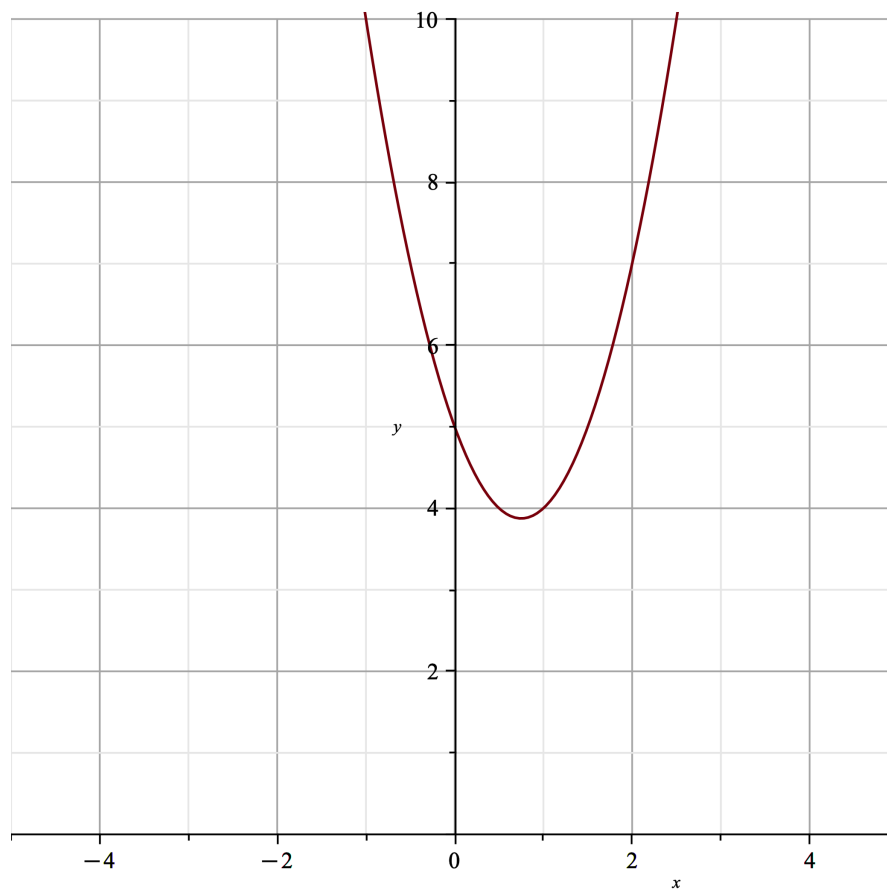
Til bestemmelse af toppunktet for en parabel har vi en formel, der stort set kun kræver korrekt aflæsning af koefficienterne i andengradspolynomiet og indsættelse i en formel.

Lad os se på et eksempel – og vi tegner lige grafen inden vi går i gang med toppunktsbestemmelsen:

$$f(x) := 2x^2 - 3x + 5$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 \quad (5.1)$$

`plot(f(x), x = -5 .. 5, y = 0 .. 10, gridlines)`



Koefficienterne aflæses og værdierne tildeles variablerne a , b og c :

$$a := 2; b := -3; c := 5$$

$$a := 2$$

$$b := -3$$

$$c := 5$$

(5.2)

Hvis du vil undgå output fra disse tildelinger, kan du erstatte semikolon med kolon. Følg med i **Variables** paletten og tjek, at du får dine variabler defineret.

▼ Variables		
	Variable ^	Value
n	a	2
n	b	-3
n	c	5
•	f	x -> 2*x^2-3...

Herefter kan d beregnes, og alt er klar til at blive puttet ind i formlen:

$$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c = -31$$

$$T := \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right] = \left[\frac{3}{4}, \frac{31}{8} \right]$$

5.3 Toppunktsbestemmelse - automatisk beregning

Det 'kritiske' i ovenstående metode til beregning af toppunktet er, at du selv skal aflæse koefficienterne i andengradspolynomiet. Her *kan* der opstå fejl.

I beregningen nedenfor er dette automatiseret vha. Maple-funktionen *coeff*.

Her skal du blot skifte funktionsudtrykket ud med et andet, og genberegne (tryk Enter efter hver linje – eller marker alt, du vil have

genberegnet, og tryk på , som du finder i **Home**-fanebladet).

$$f(x) := \frac{3}{4}x^2 + 2x - 4$$

$$f := x \mapsto \frac{3}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4 \quad (5.3)$$

$$a := \text{coeff}(f(x), x, 2) = \frac{3}{4}$$

$$b := \text{coeff}(f(x), x, 1) = 2$$

$$c := \text{coeff}(f(x), x, 0) = -4$$

$$d := b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 16$$

$$T := \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right] = \left[-\frac{4}{3}, -\frac{16}{3} \right]$$

5.4 Faktoropløsning af andengradspolynomiet

Faktoropløsning går helt af sig selv. Maple finder selv ud af, om der er 1, 2 eller ingen rødder i andengradsudtrykket.

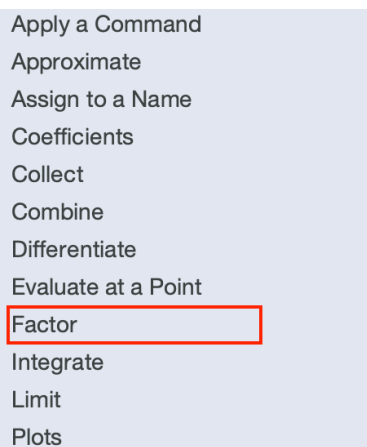
Først faktoropløsning af et andengradspolynomium med **to rødder**:

$$f(x) := \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

$$f := x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4 \quad (5.4)$$

Udregn funktionsværdien $f(x)$ inline ved at taste alt (option)+Enter. Herefter klikker du på resultatet og vælger **Factor** i kontekstmenuen (kun et udsnit er vist):

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$



Resultatet kommer til at se sådan ud:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \stackrel{\text{factor}}{=} \frac{(x-2)(x-4)}{2} \quad g(x) := -3x^2 + 12x - 12$$

Hvis der **kun er én rød** bliver faktoropløsningen:

$$g := x \mapsto -3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 12$$

$$g(x) \quad (5.5)$$

$$-3x^2 + 12x - 12 \stackrel{\text{factor}}{=} -3(x-2)^2 \quad h(x) := x^2 + x + 1$$

Og i det tilfælde, hvor der **ingen rødder** er, returneres blot det oprindelige udtryk:

$$h := x \mapsto x^2 + x + 1$$

$$h(x) \quad (5.6)$$

$$x^2 + x + 1 \stackrel{\text{factor}}{=} x^2 + x + 1$$

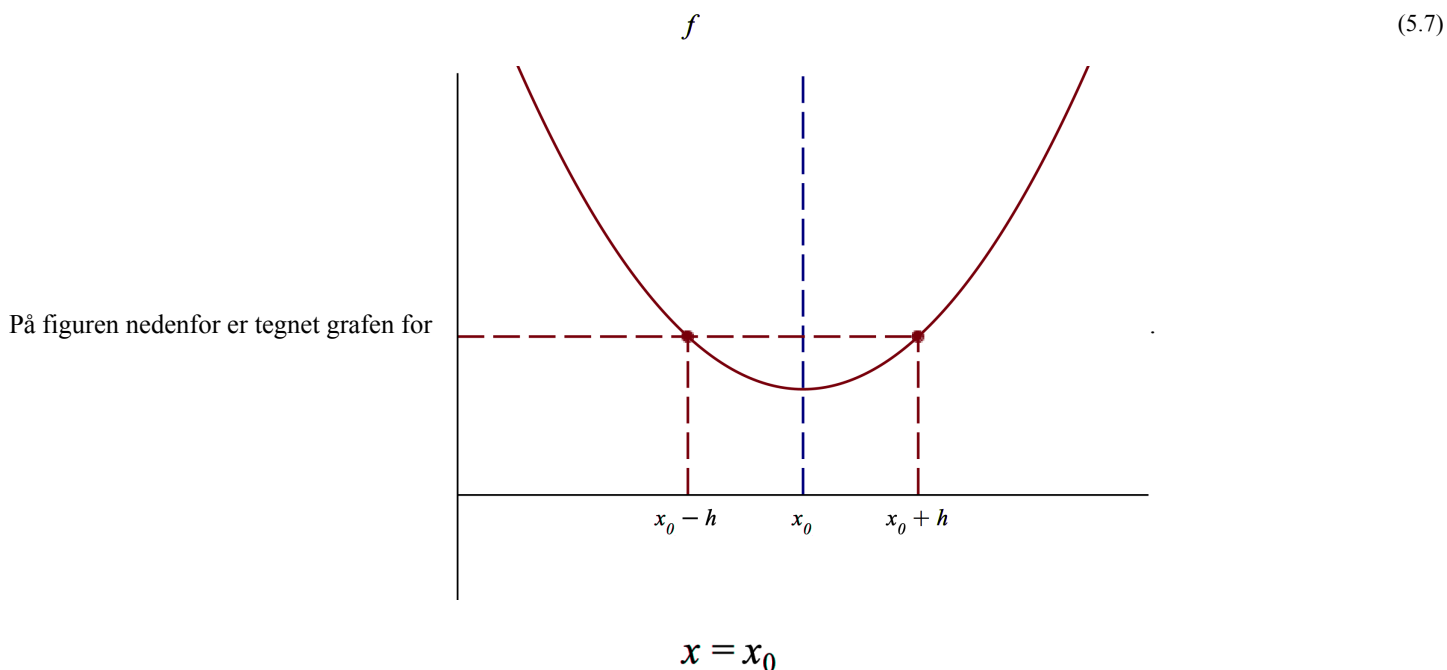
5.5 CAS-beviser (Avanceret)

5.5.1 Toppunktsformlen

restart

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f := x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



Af figuren ses, at parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje $x_0 - h$ gennem toppunktet. Denne symmetri betyder, at $x_0 + h$ og $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$ må have samme y -værdi. Dvs., at

x_0

Denne ligning kan vi løse med hensyn til $f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$:

$$a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c = a(x_0 - h)^2 + b(x_0 - h) + c$$

(5.8)

$$\left[\left[x_0 = -\frac{b}{2a} \right] \right]$$

(5.8)

x

Toppunktets $x_0 = -\frac{b}{2a}$ -koordinat er således y .

For at finde $-\frac{b}{2a}$ -koordinaten til toppunktet indsættes f i forskriften for $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$:

$$-\frac{b^2}{4a} + c \stackrel{\text{simplicity}}{=} -\frac{b^2}{4a} + c - d$$

For at få dette til at ligne den rigtige formel, skal vi erstatte tælleren med $T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right)$.

Hermed har vi vist toppunktsformlen .

5.5.2 Andengradsligningen

$$eq := a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Vi navngiver andengradsligningen og giver et nyt navn hver gang der er foretaget en omformning.

$$eq := a x^2 + b x + c = 0$$

$$c \tag{5.9}$$

Først trækker vi $eq_1 := eq - c$ fra på begge sider:

$$\stackrel{\text{simply}}{=} x(a x + b) = -c \quad 4 a$$

Så ganger vi med eq_2 på begge sider (og kalder den nye ligning for $eq_2 := \text{expand}(4 a \cdot eq_1)$). Vi benytter expand for at få parenteserne ganget ud:

$$\stackrel{\text{simply}}{=} 4 a^2 x^2 + 4 a b x = -4 a c \quad b^2$$

eq_3 lægges til på begge sider (og den nye ligning kaldes $eq_3 := eq_2 + b^2$)

$$\stackrel{\text{simply}}{=} (2 a x + b)^2 = -4 a c + b^2 d = b^2 - 4 a \cdot c$$

– og Maple har straks set, at venstresiden kan skrives som kvadratet på en to-leddet størrelse.

Nu skal vi have indsat eq_3 på højresiden i $eq_4 := \text{algsols}(b^2 - 4 a \cdot c = d, eq_3)$. Det er lidt besværligt at få Maple til det, så vi kan gøre det manuelt eller benytte kommandoen

$$\stackrel{\text{simply}}{=} (2 a x + b)^2 = d \quad d > 0$$

Vi deler nu op i tre tilfælde:

$$\text{Tilfælde 1: } d > 0 \quad \frac{-b + \sqrt{d}}{2 a}, \frac{-b - \sqrt{d}}{2 a}$$

$$d = 0 \tag{5.10}$$

I dette tilfælde er der altså to løsninger

Tilfælde 2: $d = 0$

eq_4 indsættes i $eq_5 := \text{sols}(d = 0, eq_4)$:

$$\stackrel{\text{simply}}{=} (2 a x + b)^2 = 0 \quad \text{sols}(eq_5, x)$$

$$-\frac{b}{2 a}, -\frac{b}{2 a}$$

$$d < 0 \tag{5.11}$$

Og vi ser, at her er én løsning.

Tilfælde 3: $(2 a x + b)^2$

Her er ingen løsninger, idet aldrig kan blive negativ.

5.5.3 Faktoropløsning

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Hvis andengradspolynomiumet r_1 har rødderne r_2 og $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$, så kan det faktorpløses som

$$r_1 := \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} :$$

Sæt

$$r_2 := \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} :$$

$$a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Så er

$$a \left(x - \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \right) \stackrel{\text{expand}}{=} a x^2 + b x + \frac{b^2}{4a} - \frac{d}{4a} \xrightarrow{\text{evaluate at point}}$$

$$a x^2 + b x + \frac{b^2}{4a} - \frac{-4ac + b^2}{4a} \stackrel{\text{simple}}{=} a x^2 + b x + c = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Hvor **Evaluate at a Point** er benyttet til at indsætte $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Hvis andengradspolynomiumet r kun har én rod, $f(x) = a \cdot (x - r)^2$, kan det faktorpløses som $r := -\frac{b}{2a} :$

Sæt

$$a \cdot (x - r)^2$$

Så er

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \stackrel{\text{expand}}{=} \frac{b^2}{4a} + b x + a x^2 - \frac{b^2}{4a} = c$$

Vi mangler blot at vise, at $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$. Dette følger imidlertid af, at c i dette tilfælde, hvor der kun er én rod. Ved at isolere $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ får vi:

$$\xrightarrow{\text{isolate for c}} c = \frac{b^2}{4a}$$

Hvilket skulle vises.

6 Funktioner

6.1 Regneforskrift

En funktion som fx $f(x) = 2x - 1$ defineres således i Maple:

$$f(x) := 2x - 1$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x - 1 \quad (6.1)$$

Det er meget vigtigt, at du skriver $:=$ (altså 'kolon lig med') i definitionen. Hvis du blot skriver $=$ får du intet defineret.

Lad os se, om funktionen fungerer som den skal:

$$f(2) = 3$$

$$f(5) = 9$$

Men du kan sætte alle mulige udtryk ind i funktionen f i stedet for x :

$$f(u) = 2u - 1$$

$$f(2u + 3) = 4u + 5$$

6.1.1 Alternativ definition

Maples respons på en funktionsdefinition ser måske lidt underlig ud, men det er Maple måde at opfatte definitionen på:

f er funktionens navn, og funktionen er defineret ved, at ethvert x afbildes i $2x - 1$. Det, at x afbildes i $2x - 1$, udtrykkes ved pilen $\rightarrow$.

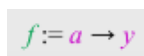
Du kan alternativt definere en funktion ved

$$f := x \rightarrow 2x - 1$$

$$f := x \mapsto 2 \cdot x - 1 \quad (6.2)$$

hvor pilen $\rightarrow$ skrives lettest med genvejen $\rightarrow$, hvor du taster bindestreg (-) efterfulgt af større end (>).

Du kan naturligvis også benytte skabelonen i Expression-paletten:



hvor du benytter TAB-knappen til at navigere fra pladsholder til pladsholder.

6.1.2 Eksempel

Definer en funktion ved

$$g(x) = 2x^2 - 4x + 7.$$

og udregn følgende værdier:

$$g(0), g(3 + h) \text{ og } g(x + h)$$

Vi definerer:

$$g(x) := 2x^2 - 4x + 7$$

$$g := x \mapsto 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 7 \quad (6.3)$$

– og udregner:

$$g(0) = 7$$

$$g(3 + h) = 2(3 + h)^2 - 4(3 + h) + 7$$

$$g(x + h) = 2(x + h)^2 - 4(x + h) + 7$$

6.2 Graftegning

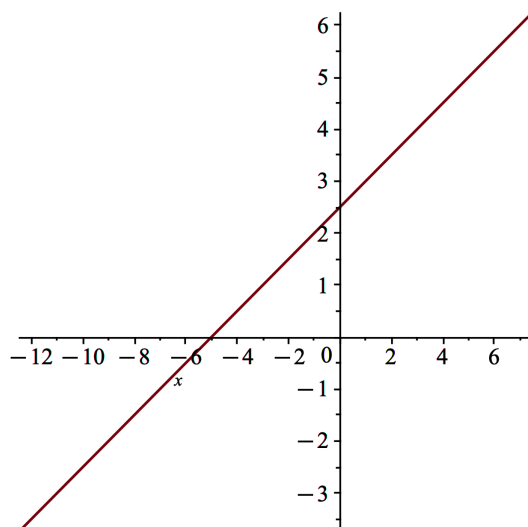
Grafen for funktionen f tegner du sådan her:

x -intervallet vil som standard være $[-10, 10]$, men Maple vil altid forsøge at finde et interval, som giver det 'bedste' plot af grafen. I grafen nedenfor er det stort set intervallet $[-10, 10]$, der plottes i.

$$f(x) := 2x - 1$$

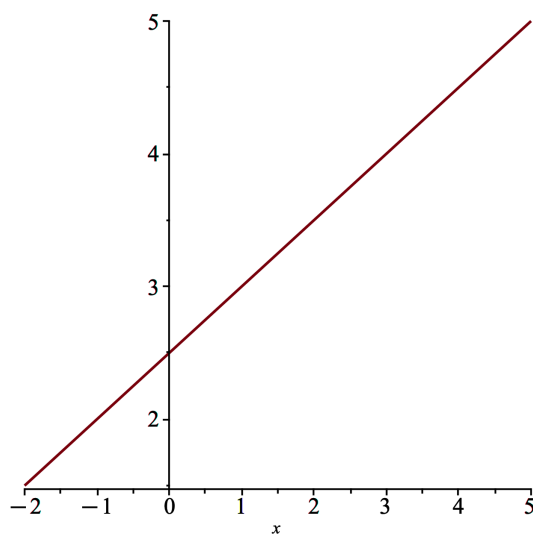
$$f := x \mapsto 2 \cdot x - 1 \quad (6.4)$$

`plot(f(x))`



Hvis du vil have et andet x -interval fx $[-2, 5]$ er kommandoen denne, hvor der mellem -2 og 5 er to punktummer

`plot(f(x), x=-2..5, size=[300, 300])`

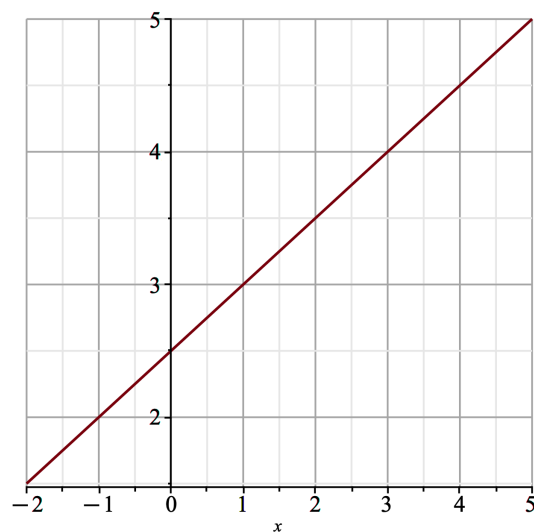


Ofte er det at ønskeligt at have et 'gridnet' (kan være et kvadratnet, hvis enhederne på akserne er de samme).

Dette kan klares i en snæver vending ved at klikke i grafen, hvorved **Plot-2D** fanen med graf-værktøjer vises øverst:



og dernæst klikke på knappen **Toggle gridlines** (markeret med en rød firkant på billedet nedenfor). Så ser det sådan ud:



Hvis du vil tegne flere grafer i samme koordinatsystem, skal du samle funktionerne med kantede parenteser [].

Lad os se på et eksempel, hvor vi også styrer farven på graferne:

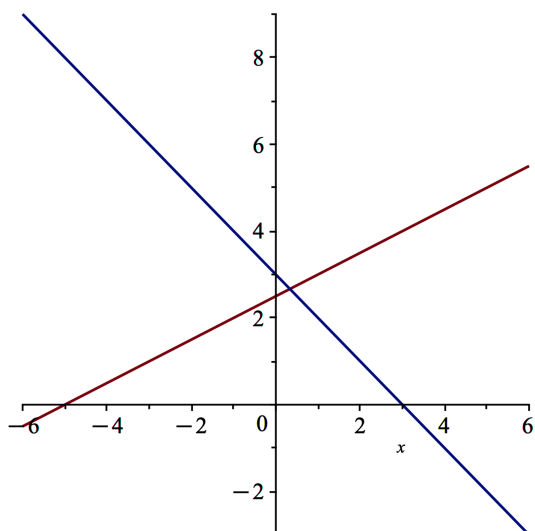
$$f(x) := \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$f := x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \quad (6.6)$$

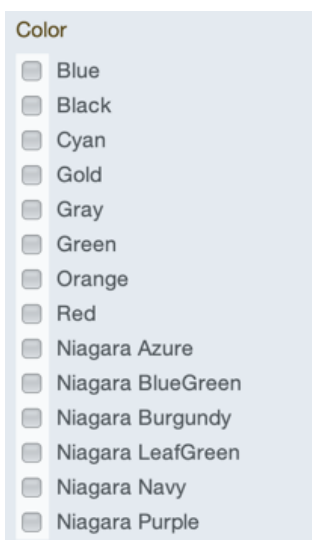
$$g(x) := -x + 3$$

$$g := x \mapsto -x + 3 \quad (6.7)$$

`plot([f(x), g(x)], x=-6..6)`

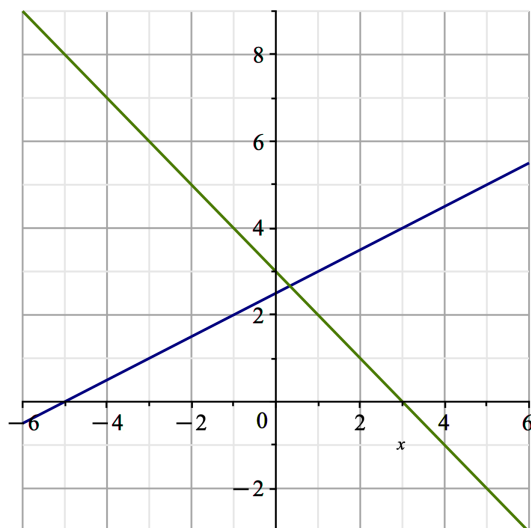


Hvis du vil have andre farver på dine grafer, så kan du klikke på en af graferne og vælge Color i grafens kontekstmenu.



Det er ikke helt uproblematisk at benytte farver fra menuen, idet en genberegning vil få farverne skifte til standard. Det kan du undgå ved at 'hardcode' farven. Og vil du 'hardcode', at du vil have et gitter på din graf, så tilføjer du *gridlines*:

```
plot([f(x), g(x)], x=-6..6, color = ["Navy", "LeafGreen"])
```



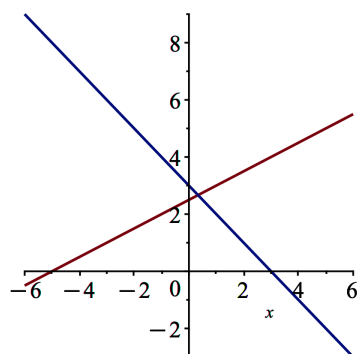
Du kan finde en liste over farver ved at gå til Help-menu, eller blot skrive (efterfulgt af Enter)

```
?colornames
```

Du finder et væld af muligheder til formatering af et plot ved at klikke på grafen.

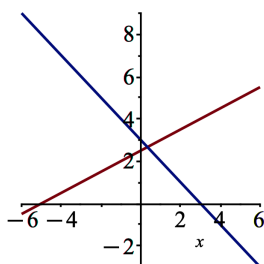
De plots, Maple producerer, er ofte ganske store og virker for store specielt på print og i pdf'er. Du kan styre størrelsen af plots med optionen *size*, hvor du i pixels skal angive, hvor stort du ønsker dit plot, og det skal ske på formen [bredde,højde]:

```
plot([f(x), g(x)], x=-6..6, size = [200, 200])
```

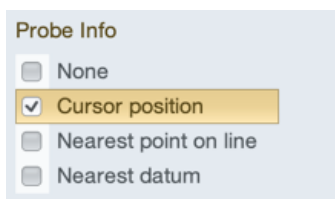


– eller endnu mindre

```
plot([f(x), g(x)], x=-6..6, size = [150, 150])
```



Hvis du vil aflæse punkter på dine grafer, så finder du et værktøj til dette ved at klikke i plottet og vælge **Probe Info...> Cursor Position** (eller en af de andre muligheder):



Eksperimenter!

Husk at vælge **Probe Info...> None** når du er færdig.

6.3 Lineære funktioner

En lineær funktion er en funktion med en ret linje som graf (som ikke er lodret).

Den generelle forskrift for en lineær funktion er:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

hvor a er linjens hældning og b er skæringen med y -aksen.

Der er formler til at finde a og b ud fra to givne punkter på linjen: Hvis de to punkter har koordinaterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , er formlerne for a og b :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ og } b = y_1 - a \cdot x_1$$

6.3.1 eksempel

Grafen for en lineær funktion f går gennem punkterne $(-3, 1)$ og $(7, 6)$.

Find forskriften for denne funktion.

For at sikre, at vi ikke laver fejl under indtastningen af koordinaterne i formlen for a , kan det være klogt at lave et lille skema på et stykke papir, hvor (x_1, y_1) og (x_2, y_2) skrives over de aktuelle koordinater:

$$\begin{array}{cc} (x_1 & y_1) & (x_2 & y_2) \\ (-3 & 1) & (7 & 6) \end{array}$$

Vi indtaster i formlen for a , hvor vi samtidig med definerer a med $:=$

$$a := \frac{6 - 1}{7 - (-3)}$$

$$a := \frac{1}{2} \tag{6.8}$$

Da vi har defineret a , kan vi skrive a i formlen for b i stedet for at indsætte værdien $\frac{1}{2}$:

$$b := 1 - a \cdot (-3)$$

$$b := \frac{5}{2} \tag{6.9}$$

Vi kan nu definere f således:

$$f(x) := a \cdot x + b$$

$$f := x \mapsto a \cdot x + b \quad (6.10)$$

og udregne $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Vi kan hurtigt tjekke, om vi har regnet rigtigt:

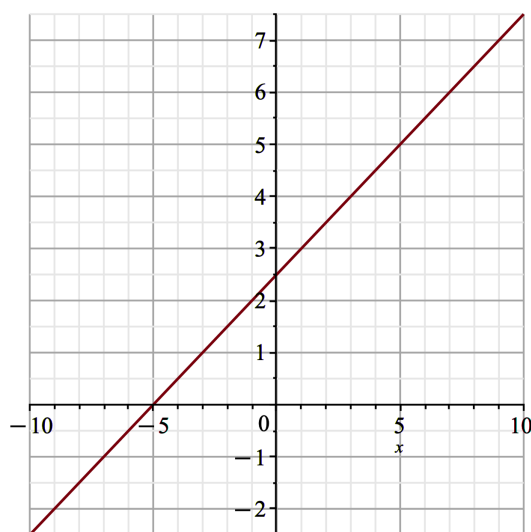
$$f(-3) = 1$$

$$f(7) = 6$$

Så det passer.

Da de to givne koordinatsæt er så fine, kan vi også tjekke grafisk, om vi har regnet rigtigt:

`plot(f(x), x=-10..10, gridlines, size=[300, 300])`



6.4 Stykkevist definerede funktioner

En funktion kan også bestå af forskellige regneforskrifter, der er defineret i hvert sit interval.

Et simpelt eksempel herpå er funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 6 & x > 2 \end{cases}$$

Denne funktion defineres i Maple ved at benytte skabelonen $\begin{cases} -x & x < a \\ x & x \geq a \end{cases}$ i **Expression**-paletten og udfylde denne. Brug TAB-tasten til at hoppe fra pladsholder til pladsholder og lad være med at genbruge noget af det, der allerede står i pladsholderne.

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 6 & x > 2 \end{cases}$$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2 \cdot x + 1 & x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} + 6 & 2 < x \end{cases} \quad (6.11)$$

Funktionen virker som enhver anden funktion:

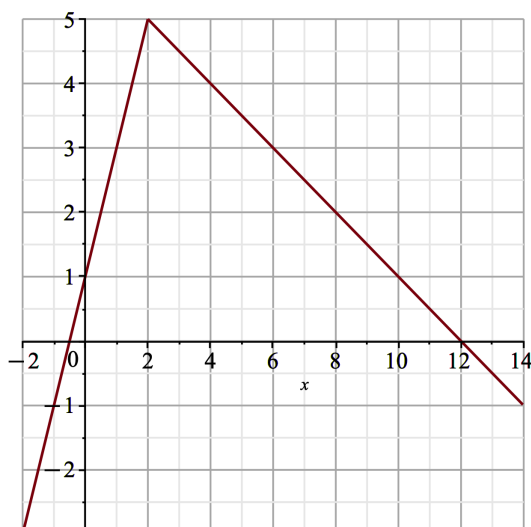
Funktionsværdier beregnes med:

$$f(0) = -1$$

$$f(3) = 5$$

og grafen tegnes sådan

`plot(f(x), x=-2..14, gridlines)`



Hvis du holder markøren over skabelonen i **Expression**-paletten, kan du se, hvilken syntaks du skal bruge, hvis du vil skrive definitionen direkte. Der står

`piecewise(x < a, -x, x ≥ a, x)`

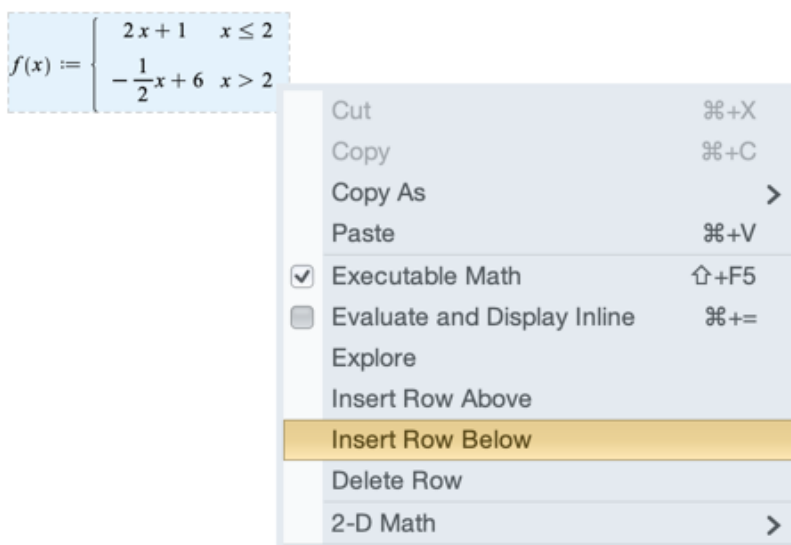
Med vores eksempel vil det være

$$f(x) := \text{piecewise}\left(x \leq 2, 2x + 1, x > 2, -\frac{1}{2}x + 6\right)$$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} + 6 & 2 < x \end{cases} \quad (6.12)$$

Denne syntaks kan nemt udbygges til at omfatte mere end 2 stykker i funktionsforskriften.

TIP: Hvis du får behov for at indsætte et tredje funktionsudtryk, så indtaster du de første to funktionsudtryk (som beskrevet ovenfor). Højreklik herefter



og vælg 'Insert Row Below'. Dette vil give dig en tredje linje til indtastning:

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 6 & 2 < x \leq 8 \\ \text{?} & \text{?} \end{cases}$$

som du udfylder med det tredje funktionsudtryk med tilhørende interval.

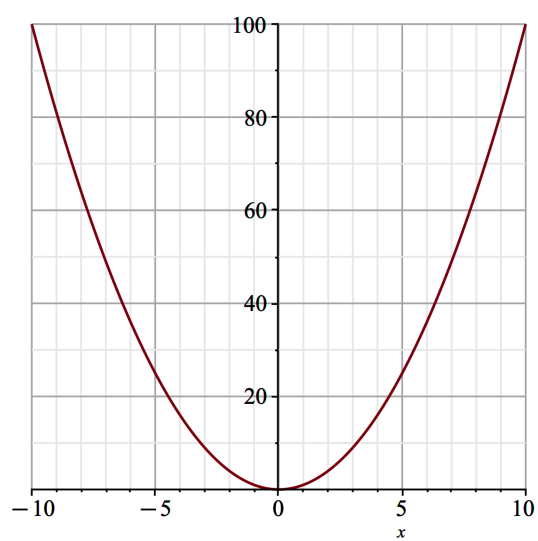
6.5 Nogle elementære funktioner

Vi skal tegne følgende funktioner

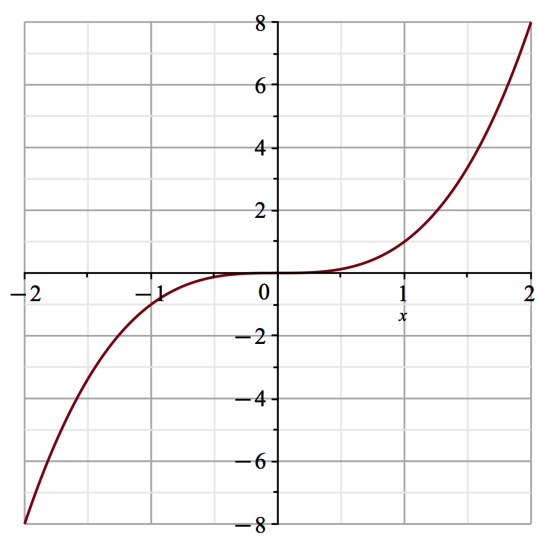
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$

Vi vil tegne graferne i hvert sit koordinatsystem. De tre første funktioner er helt uproblematisk. Da vi ikke skal bruge funktionerne til andet end til at se deres grafer, skriver vi funktionsudtrykket direkte ind i plot-kommandoen uden at definere en egentlig funktion.

`plot( $x^2$ , size = [300, 300])`

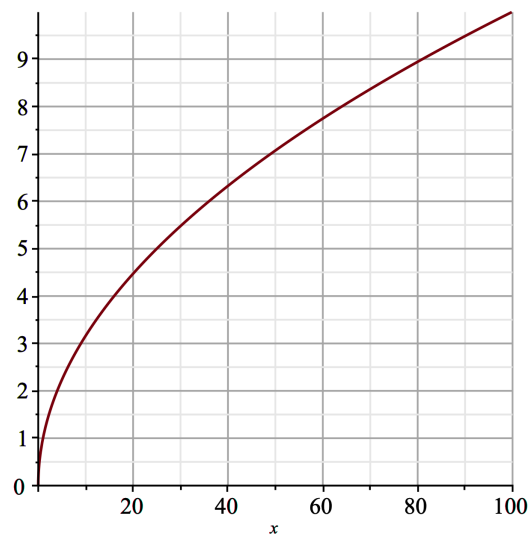


`plot( $x^3$ , x = -2 .. 2, size = [300, 300])`



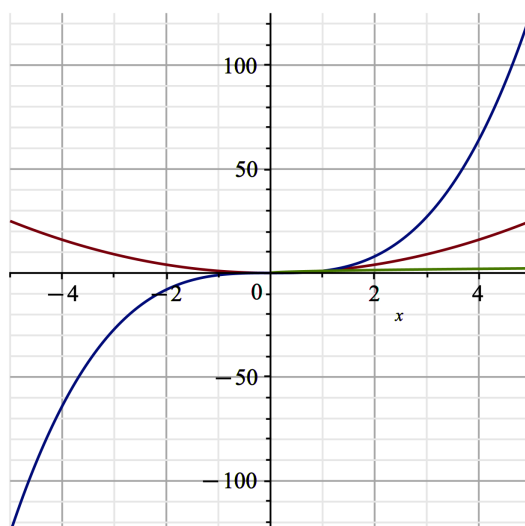
Her er x -intervallet ændret, så vi kan få et mindre y -interval, der i standardindstillingen vil være fra $[-1000, 1000]$.

`plot( $\sqrt{x}$ ,  $x = 0 \dots 100$ ,  $size = [300, 300]$ )`



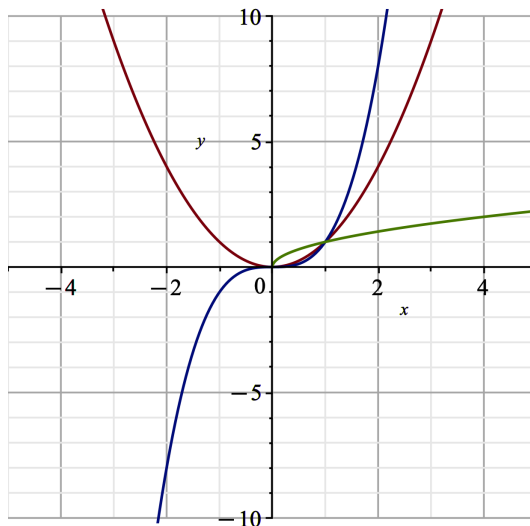
Her er x -intervallet ændret for at afspejle, at $\sqrt{x}$ kun er defineret i $[0, \infty[$

`plot( $[x^2, x^3, \sqrt{x}]$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $size = [300, 300]$ )`



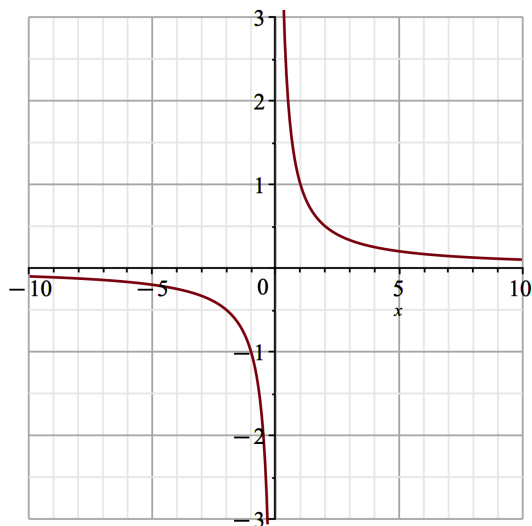
For bedre at kunne se den grønne graf, er det her en god ide at begrænse y -intervallet. Det sker sådan her:

```
plot([x^2, x^3, sqrt(x)], x = -5 .. 5, y = -10 .. 10, size = [300, 300])
```



Hvis du skal tegne funktionen for $f(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet $[-10, 10]$ bliver resultatet umiddelbart ganske overbevisende:

```
plot(1/x, size = [300, 300])
```



For x -værdier tæt ved 0 bliver y -værdierne enormt store, så Maple finder selv ud af, at begrænse y -aksen passende. Dette styres af feature, der kaldes *smartview*.

7 Logaritme- og eksponentialfunktioner

7.1 10-talslogaritmen log

Titalslogaritmen til et positivt tal a defineres som

$\log(a)$ = 'den eksponent 10 skal opløftes til for at give a '

Fx er $\log(10) = 1$, fordi den eksponent, 10 skal opløftes til, for at give 10, er 1 — altså $10^1 = 10$.

På samme måde fås $\log(100) = 2$, fordi $10^2 = 100$. Vi kan lave en tabel:

a	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log(a)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Bestem $\log(2)$:

Skal du med denne definition finde fx $\log(2)$, er du nødt til på en eller anden måde at finde en passende eksponent, så 10 opløftet til denne eksponent giver 2. Der er flere måder at gøre dette på:

Metode 1

Af tabellen ser du, at $10^0 = 1$ og $10^1 = 10$, så det søgte tal må ligge mellem 0 og 1. Prøv så med 0.5: $10^{0.5} = 3.162277660$

men det er for meget.

Prøv så med 0.25:

$$10^{0.25} = 1.778279410$$

— for lidt. Prøv selv her ved at indtaste nye værdier i eksponenten, og prøv, om du kan ramme 2:

Før eller siden kommer du frem til, at

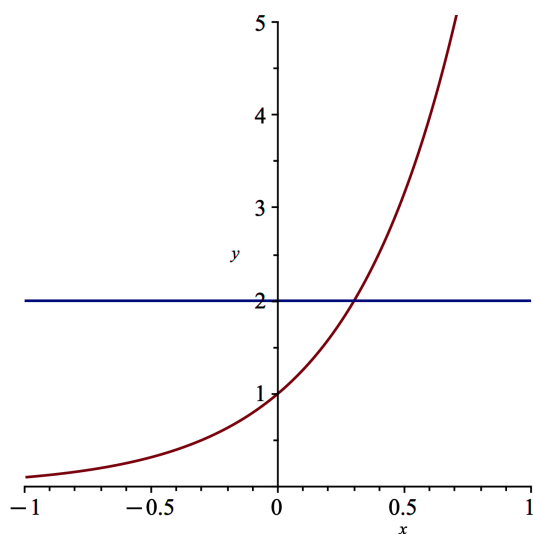
$$10^{0.301} = 1.999861870$$

— stadig for lidt, men du er tæt på, så $\log(2) \approx 0.301$.

Metode 2

Prøv så med en grafisk tilgang. Tegner du graferne for $y = 10^x$ og $y = 2$, må skæringspunktet for disse være den søgte værdi for $\log(2)$.

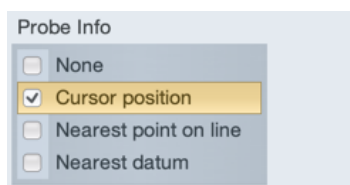
```
plot([10^x, 2], x=-1..1, y=0..5, size=[300, 300])
```



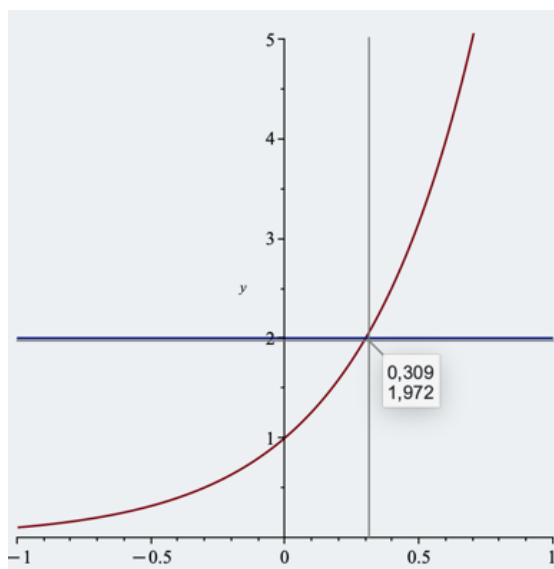
Klik i grafen ovenfor, og sørg for, at sigtekornet er valgt (vist med en rød firkant):



Klik nu i grafen, og vælg **Probe Info > Cursor Position** i grafens kontekstmenu



Du kan så bruge sigtekornet til at aflæse med. Det kommer til at se nogenlunde sådan ud:



Du kan aflæse skæringspunktet til ca. $(0.30, 2)$. Du kan lave en bedre aflæsning ved at zoome og panorere:

Klik i grafen, så du får værktøjslinjen frem:



Klik på luppen (markeret med rød firkant ovenfor) og træk med musen det område, du vil have forstørret. Det kan du gøre nogle gange, og herefter vil du kunne aflæse ret præcist.

Hvis du får behov for at flytte grafen lidt i vinduet, så trykker du på knappen (pan) lige til venstre for luppen.

Du ophæver Probe Info igen ved at klikke på grafen og vælge **Probe Info > None**

Metode 3

At finde en eksponent, så 10 opløftet til denne eksponent giver 2, er det samme som at løse ligningen $10^x = 2$ med hensyn til x .

Til denne opgave kan du benytte Maple. Du kan benytte **Solve**, men den vil finde en symbolsk løsning (som vi ikke rigtigt forstår endnu), så sæt et punktum efter 2 — det er en ganske smart måde at tvinge Maple til at regne numerisk:

$$\text{solve}(10^x = 2., x)$$

$$0.3010299957 \quad (7.1)$$

Altså er $\log(2) \approx 0.3010$

Definition af log

Af metode 3 ovenfor følger, at vi – i Maple terminologi – kan definere **log** som funktionen (navnet λ er kun midlertidigt – du finder det i paletten **Greek**):

$$\lambda(a) := \text{solve}(10^x = a, x)$$

$$\lambda := a \mapsto \text{solve}(10^x = a, x) \quad (7.2)$$

hvilket netop udtrykker, at funktionsværdien i a (dvs. logaritmen til a) findes ved at løse ligningen $10^x = a$.

Lad os tjekke, at det virker:

$$\lambda(10) = 1$$

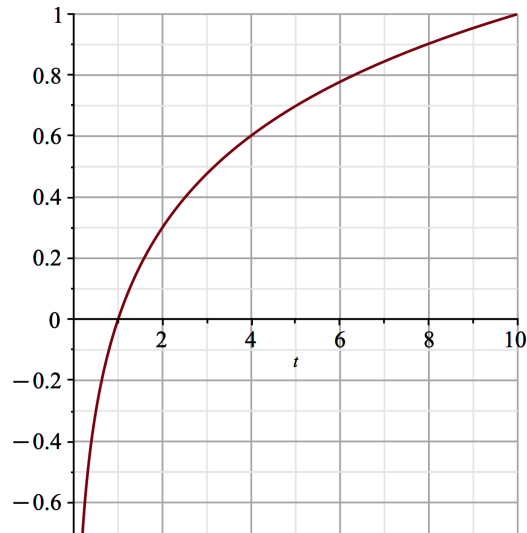
$$\lambda(100) = 2$$

$$\lambda(2.) = 0.3010299957$$

– hvor vi i den sidste udregning har skrevet 2. i stedet for 2 for at sikre, at Maple giver os et decimaltal.

Du kan naturligvis også tegne grafen for λ :

`plot( $\lambda(t)$ ,  $t = 0 .. 10$ , size = [300, 300])`



Funktionen λ betegnes almindeligvis med $\log$, der er en forkortelse af logaritme. Funktionen er indbygget i Maple under navnet $\log_{10}(x)$ — og det skal du skrive.

I **Expression** paletten finder du en skabelon til at skrive dette: `log10(a)`

men det nemmeste er at indtaste som:

pc: `log Ctrl+_ 10 pil-højre (x)`

mac: `log cmd+option+B 10 pil-højre (x)`

OBS: I Gym-pakken er der lavet en genvej til 10-talslogaritmen, der har navnet *Log* — altså **log** med stort begyndelsesbogstav. Den fungerer præcis ligesom $\log_{10}$, men brugen af den kræver, at Gym-pakken er indlæst. Det sker således:

`with(Gym) :`

`Log(10) = 1`

`Log(100) = 2`

`Log(2.0) = 0.3010299957`

Læg mærke til, at der efter `with(Gym)` er sat et kolon (:). Det sker for at undgå, at navnene på de mere end 100 kommandoer, der er i Gym-pakken, kommer væltende ud.

7.2 2-talslogaritmen - Øvelse

Definer 2-talslogaritmen ved

$\tau(a)$ = 'den eksponent 2 skal opløftes til for at give a '

1.

Udfyld tabellen

a	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8
$\tau(a)$				0	1		

I Maple er funktionen τ tilgængelig som $\log_2(x)$. Benyt denne til at kontrollere værdierne i din tabel

2.

Du har nu set konstruktionen af to logaritmefunktioner, nemlig $\log_{10}(x)$ og $\log_2(x)$. Tallet 10 og 2 hhv. kaldes for logaritmefunktionens **grundtal**. For hvilke grundtal kan du konstruere en logaritmefunktion?

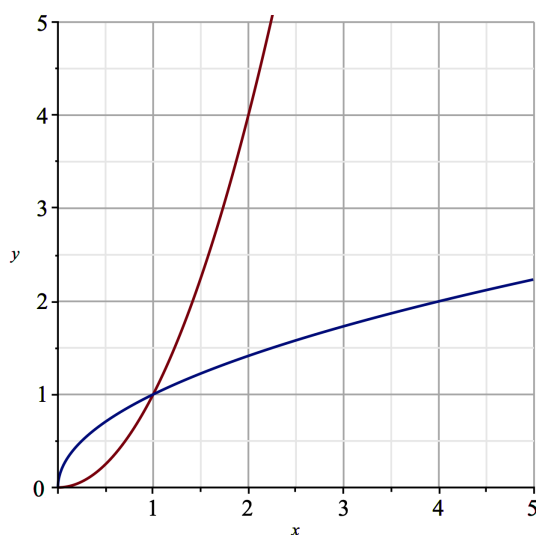
3.

Funktionerne x^2 og $\sqrt{x}$ ophæver hinanden for positive x -værdier:

$$\sqrt{x^2} = x \text{ og } (\sqrt{x})^2 = x$$

derfor kaldes $\sqrt{x}$ den omvendte funktion til x^2 — og omvendt. Tag et kig på graferne for de to funktioner. Hvad ser du?

`plot([x^2, sqrt(x)], x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, size = [300, 300])`



Argumenter for, at funktionen $\log_{10}(x)$ er den omvendte til 10^x — og omvendt. Tag også her et kig på graferne. Ser du det samme?

7.3 Eksperiment: Hvad er e ?

På lånekontrakter mv. ser man ofte en vending i stil med:

Den årlige rente er 8% (nominel) med kvartalsvis rentetilskrivning

Det betyder, at der tilskrives 2% i rente pr. kvartal. Men at tilskrive 2% i rente 4 gange, er ikke det samme som at tilskrive 8% i rente én gang:

Tilskrives 8% i rente én gang, bliver beløbet efter ét år:

$$K_0 \cdot (1 + 0.08)^1 = 1.08 K_0$$

Tilskrives 2% i rente hvert kvartal, bliver beløbet efter et år:

$$K_0 \cdot (1 + 0.02)^4 = 1.08243216 K_0$$

hvilket svarer til 8.24% i rente. Dette kaldes den effektive rente. De 0.24%, renten er blevet større, skyldes, at den rente, der er tilskrevet undervejs, også giver rente.

Du skal nu bestemme:

den effektive årlige rente svarende til 100% nominel rente med kontinuert rentetilskrivning

Situationen er den samme som ovenfor — blot har vi her en årlig rente på 100%. Denne rente deles ligeligt ud på det antal rentetilskrivninger, vi måtte ønske. Ønsker vi fx 4 rentetilskrivninger, skal der tilskrives 25% ved hver af de 4 rentetilskrivninger. Deler vi den årlige rentetilskrivning op i n lige store tilskrivninger, bliver den årlige fremskrivningsfaktor:

$$\left(1 + \frac{100\%}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Med kontinuert rentetilskrivning menes, at der tilskrives renter hvert splitsekund, og i princippet er der jo uendeligt mange af dem i et år, så det er ikke noget, vi umiddelbart kan sætte tal på.

Udfyld dette skema (og brug Maple til beregningerne):

Tilskrivning	Antal tilskrivninger	Formel	Fremskrivningsfaktor
Årlig	1	$K = K_0 \cdot (1 + 1)^1$	2
Halvårlig	2	$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$	2.25
Kvartalsvist	4		
Månedlig	12		
ugevis	52		
daglig	365		
timevis	8760		
minutvist	525600		
sekundvist	31536000		

Tip:

Hvis du skal udregne noget i stil med

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

vil du få en kæmpebrøk, der fylder flere skærme – og det kan du ikke bruge til noget her. Vælger du at regne med fx 20 cifre, skal du klikke på udtrykket og vælge **Approximate > 20** i kontekstmenuen:

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \xrightarrow{\text{at 20 digits}} 2.7169239322358924574$$

Ved beregningen 'minutvis tilskrivning' kommer du sikkert i problemer. Det skyldes, at der ikke er allokeret plads nok i computerens hukommelse til at rumme tallet. Der sker det, at Maple regner eksakt hele vejen og først til allersidst reduceres til 20 cifre.

Vi kan tvinge Maple til at regne numerisk ved at sætte et decimalpunktum efter ét af tallene i udtrykket:

$$\left(1. + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716923932$$

Og så behøver vi ikke at bruge Approximate længere (med mindre vi vil have 20 cifre).

Til beregning af 'sekundvis tilskrivning' er dette ikke tilstrækkeligt. Prøv!

Maple regner ikke med et tilstrækkeligt stort antal cifre i decimaltallene. Faktisk er standarden 10. Det kan du øge til 20 decimaler således

Digits := 20

$$Digits := 20 \tag{7.3}$$

– og så skulle det være muligt at komme igennem og få det korrekte resultat.

Konklusion

Som forventet bliver fremskrivningsfaktoren større og større, jo flere rentetilskrivninger vi deler ud på, men til sidst er det ikke ret meget.

Et kig på tallene viser, at første 5 cifre er uændrede i de tre sidste beregninger, så hvis vi udregner for rentetilskrivning hvert tiendedel sekund, må vi forvente, at de 5 første cifre også her er uændrede.

Meget tyder dog på, at når n (antal rentetilskrivninger) bliver uendelig stor, så vil fremskrivningsfaktoren nærme sig et bestemt tal. Det viser sig, at dette tal ingen systematik har i decimalerne, så det kan ikke skrives som en brøk.

Leonhard Euler, der fandt dette tal, kaldte det e . Dette tal kan karakteriseres som den årlige fremskrivningsfaktor ved kontinuert rentetilskrivning, der svarer til 100% nominel årlig rente.

7.4 Den naturlige eksponentialfunktion

Som ethvert andet positivt reelt tal (forskellig fra 1) kan e (≈ 2.71828) benyttes som grundtal for en eksponentialfunktion.

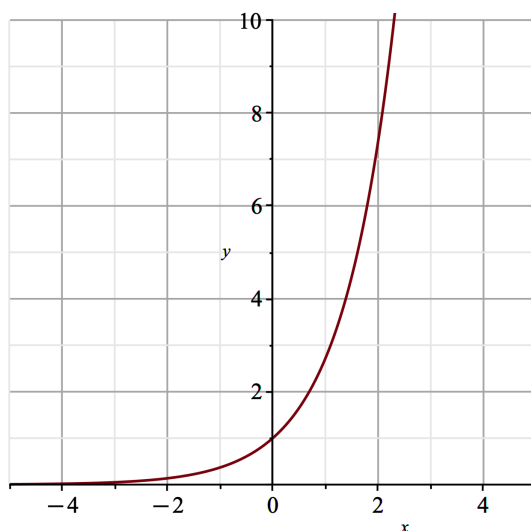
Funktionen

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

kaldes den *naturlige eksponentialfunktion*.

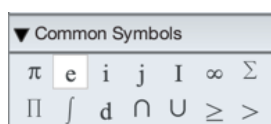
Grafen for e^x ser således ud

`plot(e^x, x=-5..5, y=0..10, size=[300, 300])`



Vigtigt:

Når du skal skrive den naturlige logaritmes grundtal e , så må du **ikke** blot bruge e fra tastaturet. I stedet skal du hente e i **Common Symbols** paletten



Den hurtigste måde at få skrevet 'det rigtige e ' er ved i math-mode at taste e efterfulgt af ESC:



Her finder du Exponentiel ' e ' øverst på listen, så du behøver blot at taste Enter.

7.5 Den naturlige logaritme $\ln$

I princippet kan vi definere en logaritmefunktion for ethvert positivt reelt tal forskellig fra 1. Vi skal

blot i definitionen udskifte 10 med et andet positivt reelt tal forskellig fra 1. Specielt vigtig er den logaritmefunktion, der fremkommer, når 10 udskiftes med $e = 2.71828\dots$

Den **naturlige logaritme** til et positivt tal a defineres som

$\ln(a)$ = 'den eksponent e skal opløftes til for at give a '

Fx er $\ln(e) = 1$, fordi den eksponent, e skal opløftes til for at give e , er 1 — altså $e^1 = e$. På samme

måde fås $\ln(e^2) = 2$. Vi kan lave en tabel:

a	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3
$\ln(a)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Pas på:

Om du i Maple skriver $\log(x)$ eller $\ln(x)$ er ligegyldigt: Begge indtastninger vil blive tolket som $\ln(x)$. Hvis du skal bruge titalslogaritmen, så skal du skrive $\log_{10}(x)$.

Naturligvis kan du også her opfatte $\ln(a)$ som løsningen til ligningen:

$\ln(a)$ = 'løsningen til ligningen $e^x = a$ med hensyn til x '

og definere den ved hjælp af solve:

$\lambda(a) := \text{solve}(e^x = a, x)$

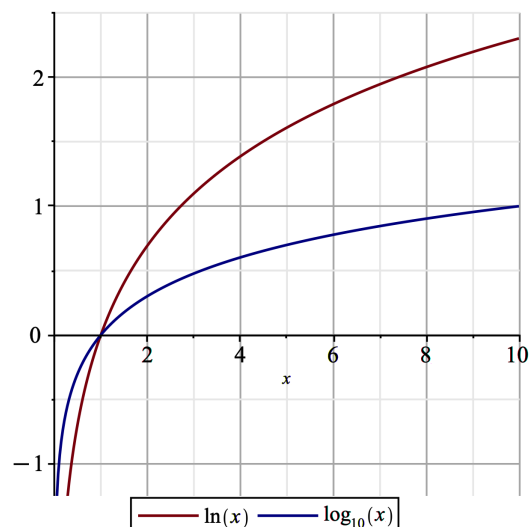
$$\lambda := a \mapsto \text{solve}(e^x = a, x) \quad (7.4)$$

$\lambda(a) = \ln(a)$

Her lurer Maple straks, at det er $\ln$, der defineres.

Grafen for $\ln(x)$ ser således ud (her tegnet sammen med grafen for $\log_{10}(x)$):

`plot([ln(x), log10(x)], x = 0 .. 10, color = ["Burgundy", "Navy"], legend = [ln(x), log10'(x)])`



Bemærkning

Hvis du udregner Log fra Gym-pakken på et x vil du se dette

with(Gym) :

$$\text{Log}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Dette kan også skrives

$$\text{Log}(x) = \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(x) = 0.43429 \cdot \ln(x)$$

Så Log og $\ln$ er altså proportionale med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{\ln(10)} \approx 0.43429$.

Eksponentielle udviklinger

Du vil ofte se en eksponentiel udvikling skrevet på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$ i stedet for den form, du måske er vant til, $f(x) = b \cdot a^x$.

Du kan ret let skifte mellem de to former — du skal blot benytte, at $e^{\ln(a)} = a$:

$$b \cdot a^x = b \cdot (e^{\ln(a)})^x = b \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

og

$$b \cdot e^{k \cdot x} = b \cdot (e^k)^x$$

Fx er

$$f(x) = 3 \cdot 1.27^x = 3 \cdot (e^{\ln(1.27)})^x = 3 \cdot e^{0.2390 \cdot x}$$

idet $\ln(1.27) \approx 0.2390$.

Og tilsvarende er

$$f(x) = 2.45 \cdot e^{-0.556 \cdot x} = 2.45 \cdot 0.5735^x$$

idet $e^{-0.556} \approx 0.5735$.

Maple kan omskrive fra formen $b \cdot a^x$ til formen $b \cdot e^{k \cdot x}$. Fx er

$$3 \cdot 1.27^x \stackrel{\text{simplify}}{=} 3 e^{0.2390169005 x}$$

hvor **Simplify** > **Simplify** fra kontekstmenuen er benyttet

7.6 Eksempler

7.6.1 Eksempel 1

I en næringsopløsning kan antallet, $B(t)$, af bakterier t timer efter et forsøgs begyndelse beskrives med:

$$B(t) = 100 \cdot e^{0.468 t}$$

a)

Hvor mange bakterier er der i opløsningen efter 5 timer ?

b)

Hvor mange procent øges antallet af bakterier pr. time ?

c)

Hvor lang tid går der ifølge modellen før antallet af bakterier er over 12000 ?

d)

Bestem fordoblingstiden.

Løsning:

a)

$$B(t) := 100 \cdot e^{0.468 t}$$

$$B := t \mapsto 100 \cdot e^{0.468 \cdot t} \quad (7.5)$$

$$B(5) = 1038.123656$$

Dette viser, at der er ca. 1038 bakterier i næringsopløsningen efter 5 timer.

b)

Fremskrivningsfaktoren er $e^{0.468}$

$$e^{0.468} - 1 = 0.596797403$$

Så antallet vil forøges med ca. 60% pr. time.

c)

$$\text{solve}(B(t) > 12000, t)$$

$$(10.22968321, \infty) \quad (7.6)$$

Dette viser, at efter 10.23 timer vil antallet af bakterier overstige 12000

d)

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(e^{0.468})} = T_2 = 1.481083719$$

Så fordoblingstiden er ca. 1.5 time.

7.6.2 Eksempel 2

Styrken af et jordskælv angives ved Richtertallet. Et jordskælv frigiver energi, og for et jordskælv af normal dybde gælder:

$$\log(E) = 2.4 \cdot M - 1.2$$

hvor M er Richtertallet, og E er den frigivne energi målt i kWh (og $\log$ betegner 10-talslogaritmen)

a)

En atomsprængning på 1 megaton udvikler en energimængde på $1.25 \cdot 10^9$ kWh. Beregn Richtertallet for et jordskælv, der udvikler samme energimængde.

b)

I Chile var der i 1960 en række jordskælv. Disse havde Richtertal 7.5, og et senere havde Richtertal 8.4.

Beregn forholdet mellem de to udviklede energimængder.

Løsning:

a)

I udregningerne benytter vi *Log* til beregningerne

Først indsættes $1.25 \cdot 10^9$ for E , og der løses mht. M :

with (Gym) :

$$\text{Log}(1.25 \cdot 10^9) = 2.4 M - 1.2 \xrightarrow{\text{solve for M}} [M = 4.290379172]$$

Dvs., at Richtertallet 4.3 svarer til en energimængde på $1.25 \cdot 10^9$ kWh.

b)

Energimængden svarende til Richtertal 7.5 og 8.4 bestemmes:

$$\text{Log}(E) = 2.4 \cdot 7.5 - 1.2 \xrightarrow{\text{solutions for E}} 6.309573445 \times 10^{16} \xrightarrow{\text{assign to a name}} E1$$

$$\text{Log}(E) = 2.4 \cdot 8.4 - 1.2 \xrightarrow{\text{solutions for E}} 9.120108394 \times 10^{18} \xrightarrow{\text{assign to a name}} E2$$

Forholdet mellem de to energimængder bliver:

$$\frac{E2}{E1} = 144.5439771$$

b) - alternativ løsning

Hvis du isolerer E i ligningen

$$\text{Log}(E) = 2.4 \cdot M - 1.2$$

kan du udtrykke energimængden som funktion af Richtertallet:

$$\text{solve}(\text{Log}(E) = 2.4 \cdot M - 1.2, E)$$

$$e^{5.526204223 M - 2.763102112}$$

(7.7)

Definer nu funktionen E ved:

$$E(M) := e^{5.526204223 \cdot M - 2.763102112}$$

$$E := M \mapsto e^{5.526204223 \cdot M - 2.763102112} \quad (7.8)$$

Så kan opgaven løses ved:

$$\frac{E(8.4)}{E(7.5)} = 144.5439770$$

7.6.3 Eksempel 3

Som et mål for surhedsgraden af en væske benyttes pH-værdien, der defineres som $pH = -\text{Log}(c)$, hvor c betegner koncentrationen af H_3O^+ -ionen, og måles i mol/L (mol pr. liter).

a)

Bestem koncentrationen i en væske med $pH = 2.2$.

b)

Gør rede for, at hvis koncentrationen c i en væske gøres 100 gange større, vil pH blive formindsket med 2.

Løsning

with(Gym) :

a)

$$\text{solve}(2.2 = -\text{Log}(c), c)$$

$$0.006309573445 \quad (7.9)$$

Dvs., at koncentrationen i en væske med $pH = 2.2$ er 0.0063 mol/L.

b)

Hvis koncentrationen c gøres 100 gange større — dvs. øges til $100 \cdot c$, bliver pH :

$$-\text{Log}(100 \cdot c) = -(\text{Log}(100) + \text{Log}(c)) = -\text{Log}(c) - 2 = pH - 2$$

Her kan vi ikke få Maple til at lave udregningen

$$-\text{Log}(100 \cdot c) = -\text{Log}(c) - 2$$

Det hænger sammen med, at Maple straks laver omskrivningen $\text{Log}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$, hvorved den simple omskrivning går tabt (Maple kan i al fald ikke se den).

8 Regressioner

8.1 Gym-pakken skal indlæses

Gym-pakken indeholder de nødvendige værktøjer til regression. Denne indlæses med kommandoen

`with(Gym)` :

Online hjælpen til Gym-pakken får du frem ved at gå til **Help**-fanen og indtaste Gym i søgefeltet:

The screenshot shows the Maple Help interface. On the left, there's a sidebar with navigation options like 'Help', 'Favorites', 'Expression', 'Calculus', etc. The main area displays search results for 'Gym'. A list of sub-topics is shown: 'Gym, BinomialTest', 'Gym, ExpReg', 'Gym, Fcdf', 'Gym, Finanssolver', 'Gym, Fpdf', and 'Gym, Gini'. Below this list is a button that says 'See All Help Search Results...'. On the right side of the interface, there's a detailed view titled 'Oversigt over Gym pakken'. It includes the section 'Kald sekvens' with two command formats: `Gym[kommando](argumenter)` and `kommando(argumenter)`. Below that is a 'Beskrivelse' (Description) section which explains that all commands in the Gym package are called either using the long form `Gym[kommando](argumenter)` or the short form `kommando(argumenter)`, and that the package must be loaded with `with(Gym)`. It also mentions that since the package is a module, commands can also be called as `Gym:-kommando`.

Heri kan du finde alle typer af regression beskrevet.

Alternativt kan du i math-mode skrive

`?Gym`

og taste Enter. Så kommer du direkte til oversigten med links til alle kommandoerne i Gym-pakken.

8.2 Import af data

Det første, du skal gøre, er at åbne Excel filen og finde ud, i hvilke felter dataene befinder sig. Vi ser her på et meget lille eksempel:

	A	B	C
1	x data	y data	
2	2	30	
3	3	35	
4	6	60	
5	7	83	
6	10	150	
7	12	194	
8	15	260	
9			

Her ligger data i det område, der med Excel notation betegnes **A2:B8**

Det skal forstås således, at data ligger i en firkant, hvor feltet A2 angiver, hvor firkanten starter, og feltet B8 angiver, hvor firkanten slutter.

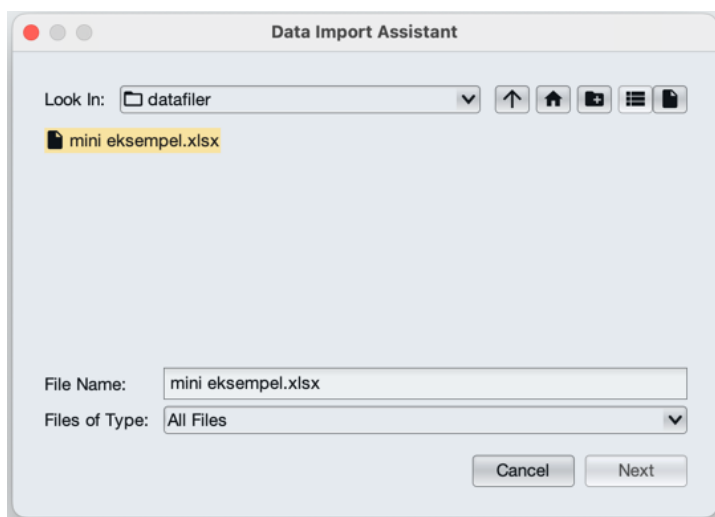
Disse to tal skal du have klar inden du importerer. Hvis der er flere ark i Excel filen, skal du også notere dig, hvilket Ark, data ligger i.

Det er meget vigtigt her, at du ikke får kolonnenavnene (altså xdata og ydata) med i dataområdet.

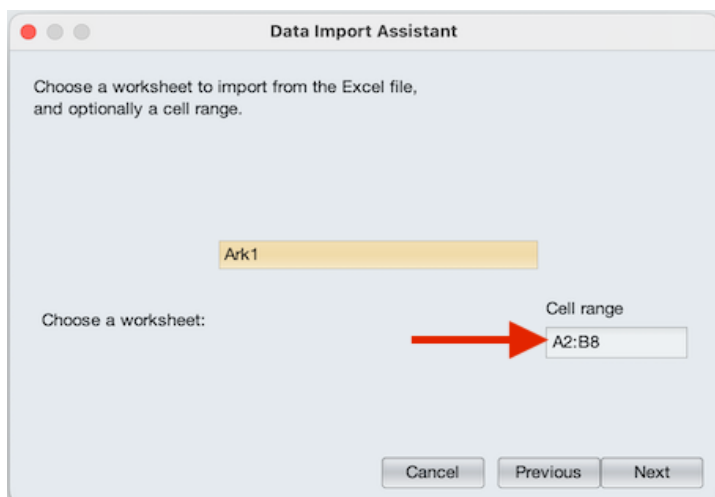
Vælg fanen **Tools**, klik på ikonen **Import Data**:



Der kommer en menu frem, hvor du skal vælge filen fra harddisken.



Indtast derefter cellerne og tryk **Next**



Tryk **Next** to gange og derefter **Done** uden at gøre andet. Herefter kommer nedenstående blå matrix frem.

Placer cursoren efter matricen og vælg **Assign to a Name** i kontekstmenuen og indtast navnet *data*:

$$\begin{bmatrix} 2. & 30. \\ 3. & 35. \\ 6. & 60. \\ 7. & 83. \\ 10. & 150. \\ 12. & 194. \\ 15. & 260. \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{assign to a name}} \textit{data}$$

For at tjekke, om det virker, kan du beregne

$$\textit{data} = \begin{bmatrix} 2. & 30. \\ 3. & 35. \\ 6. & 60. \\ 7. & 83. \\ 10. & 150. \\ 12. & 194. \\ 15. & 260. \end{bmatrix}$$

8.3 Lineær regression

Skemaet viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde(cm)	10	13	35	40	100
Tryk (atm)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Det oplyses, at trykket med god tilnærmelse er en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ af dybden under havoverfladen.

a)

Bestem tallene a og b .

b)

Bestem trykket i en dybde på 150m, og bestem den dybde, hvor trykket er 30atm

a)

Indlæs Gym-pakken

with(Gym) :

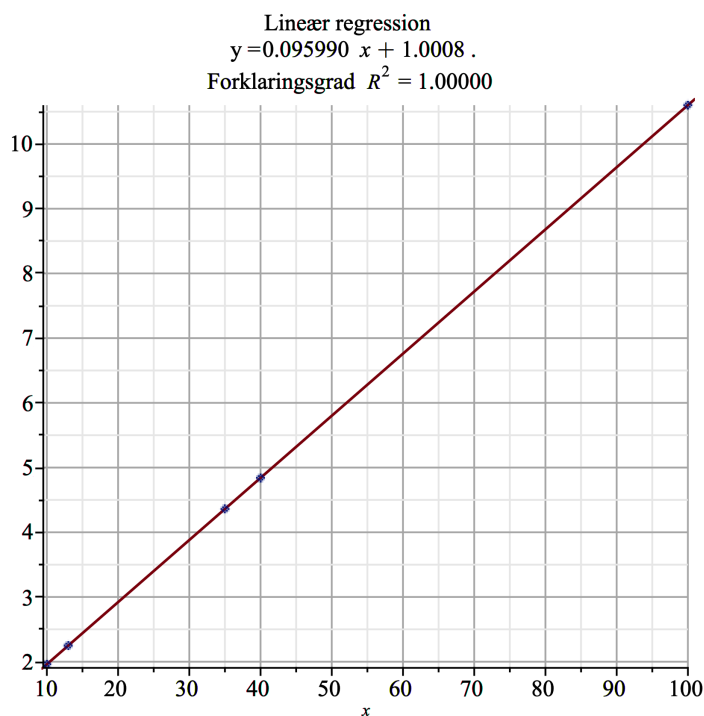
og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:

$X := [10, 13, 35, 40, 100] = [10, 13, 35, 40, 100]$

$Y := [1.96, 2.25, 4.36, 4.84, 10.6] = [1.96, 2.25, 4.36, 4.84, 10.6]$

Lineær regression foretages med kommandoen *LinReg*:

LinReg(X, Y)



Heraf ses, at $a = 0.096$ og $b = 1.00$.

b)

For at besvare dette spørgsmål, er det mest hensigtsmæssigt at have modellen udtrykt som en funktion af x . Den kan du naturligvis definere direkte som (hvor du tager regressionsudtrykket fra figuren ovenfor)

$$f(x) := 0.096 x + 1.00$$

$$f := x \mapsto 0.096 \cdot x + 1.00 \quad (8.1)$$

eller sådan her

$$f(x) := \text{LinReg}(X, Y, x)$$

$$f := x \mapsto \text{LinReg}(X, Y, x) \quad (8.2)$$

Trykket i dybden 150m kan da bestemmes således:

$$f(150) = 15.3992819614711$$

Dvs., at trykket i en dybde på 150m er 15.4 atm.

Hvis det blot er en funktionsværdi, du skal bestemme, kan du indsætte direkte i $\text{LinReg}(X, Y, x)$:

$$\text{LinReg}(X, Y, 150) = 15.3992819614711$$

Den dybde, hvor trykket er 30atm, bestemmes ved at løse ligningen:

$$f(x) = 30 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 302.1068588\}$$

Dvs., at i en dybde på 302m er trykket 30 atm

8.4 Eksponentiel regression

Tabellen viser antallet af tankstationer i Danmark på forskellige tidspunkter

År	1975	1980	1985	1990	1995
Antal	5205	4397	3622	3031	2647

Det oplyses, at antallet af tankstationer med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion $f(x) = b \cdot a^x$ af antal år efter 1975.

a)

Bestem a og b i forskriften

b)

Giv et skøn over antallet af tankstationer i 2005, hvis den eksponentielle udvikling fortsætter.

a)

Indlæs Gym-pakken

with(Gym) :

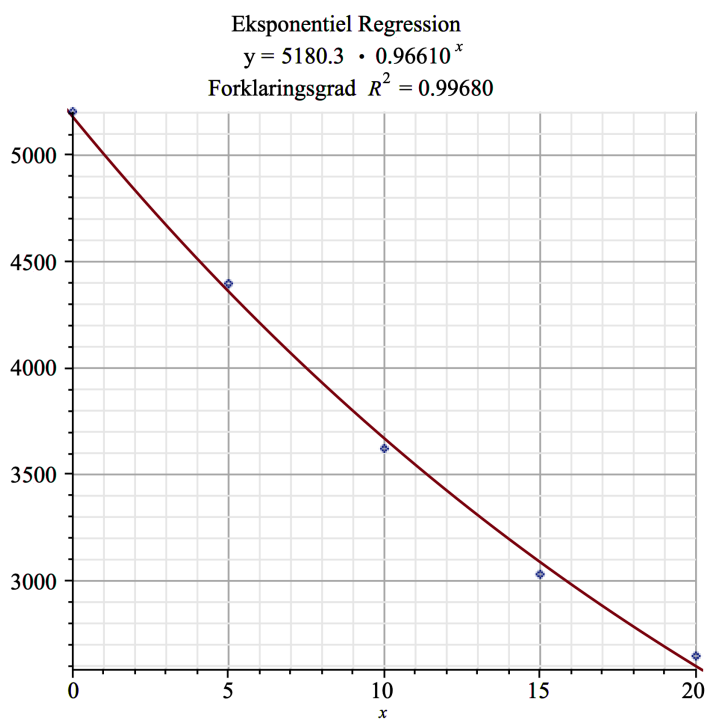
og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:

$X := [0, 5, 10, 15, 20]$:

$Y := [5205, 4397, 3622, 3031, 2647]$:

Komandoen *ExpReg* udfører en eksponentiel regression på de to dataserier:

ExpReg(X, Y)



Heraf ses, at $a = 0.966$ og $b = 5180$.

b)

For at besvare dette spørgsmål, er det mest hensigtsmæssigt at have modellen udtrykt som en funktion af x . Den kan du naturligvis definere direkte som

$$f(x) := 5180 \cdot 0.966^x$$

$$f := x \mapsto 5180 \cdot 0.966^x \quad (8.3)$$

eller som

$$f(x) := \text{ExpReg}(X, Y, x)$$

$$f := x \mapsto \text{ExpReg}(X, Y, x) \quad (8.4)$$

og herefter beregne $f(30)$:

$$f(30) = 1840.82057098811$$

Dette viser, at i 2005 vil der være 1840 tankstationer, hvis modellen holder.

8.5 Potens regression

Tabellen viser for en bestemt type gasledning sammenhængen mellem gasstrøm, målt i m^3 pr time, og tryktab pr. meter ledning, målt i millibar:

Gasstrøm	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0
Tryktab	0.002	0.008	0.033	0.074	0.130	0.204	0.294	0.522	0.816

Det oplyses, at tryktab pr. meter ledning som funktion af gasstrømmen med god tilnærmelse er en funktion af formen $f(x) = b \cdot x^a$.

a)

Bestem tallene a og b .

a)

Indlæs Gym-pakken

with(Gym) :

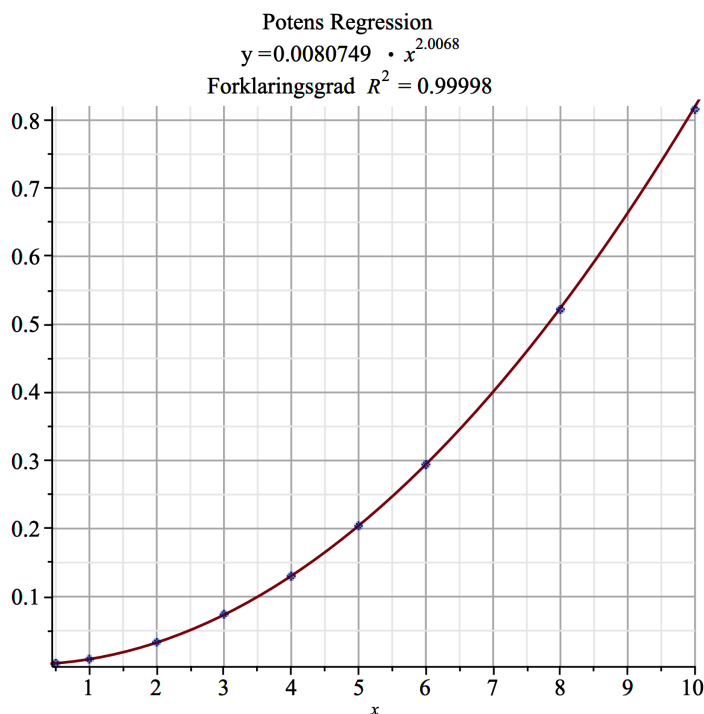
og opskriv de to dataserier som lister med tegnene [og]. Navngiv listerne som vist:

$$X := [0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10] :$$

$$Y := [0.002, 0.008, 0.033, 0.074, 0.130, 0.204, 0.294, 0.522, 0.816] :$$

Kommandoen *PowReg* udfører en potensregression på de to datalister

$PowReg(X, Y)$



Heraf ses, at $a = 2.01$ og $b = 0.00807$.

Skal du bruge forskriften til et eller andet, så kan du definere den således:

$$f(x) := 0.00807 \cdot x^{2.01}$$

$$f := x \mapsto 0.00807 \cdot x^{2.01} \quad (8.5)$$

eller således:

$$f(x) := PowReg(X, Y, x)$$

$$f := x \mapsto PowReg(X, Y, x) \quad (8.6)$$

8.6 Kvadratisk regression

En kvadratisk regression er en regression, hvor vi tilpasser et andengradspolynomium til data.

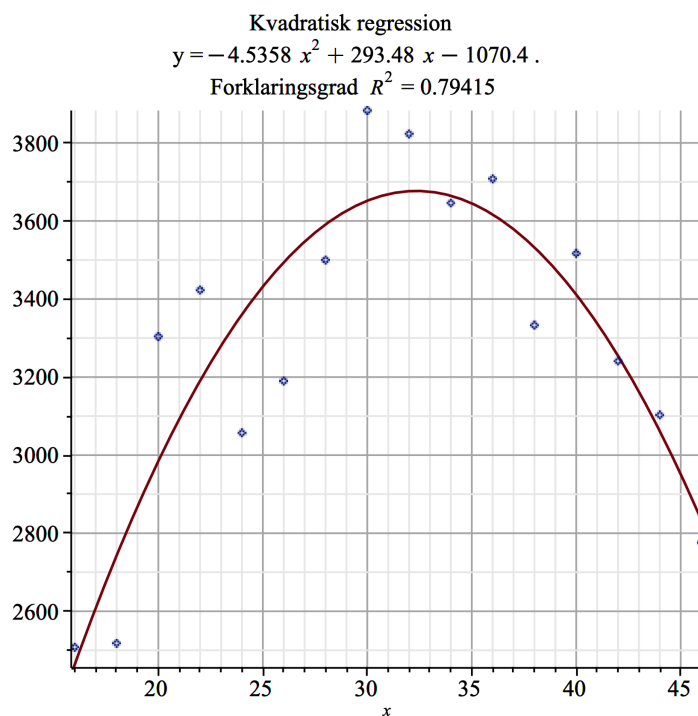
Antag, at vi har disse måledata:

$$X := [16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46] :$$

$$Y := [2508, 2518, 3304, 3423, 3057, 3190, 3500, 3883, 3823, 3646, 3708, 3333, 3517, 3241, 3103, 2776] :$$

En kvadratisk regression med kommandoen

with(Gym) :
 KvadReg(X, Y)



Hvis du kun vil have funktionsudtrykket benyttes:

$KvadReg(X, Y, x)$

$$-4.53580182072829 x^2 + 293.482948179272 x - 1070.39768907563 \quad (8.7)$$

Udregning af værdier vha. regressionsudtrykket kan ske blot ved at erstatte variabelen med et tal. Fx er er

$$KvadReg(X, Y, 30) = 3651.86911764706$$

8.7 Polynomiell regression

En polynomiell regression er en regression, hvor vi tilpasser et polynomium til data.

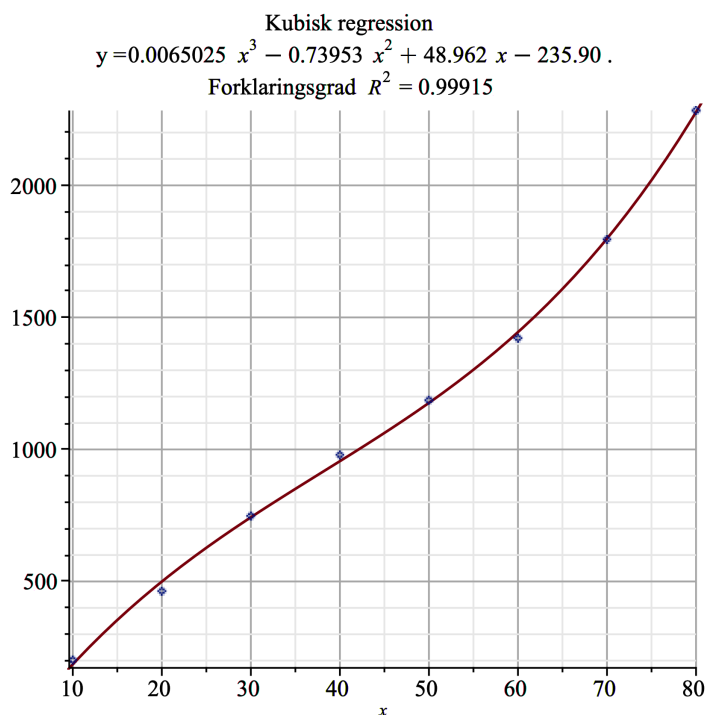
Antag, at vi har disse måledata:

$$X := [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80] :$$

$$Y := [202.4, 463.4, 748.2, 979.3, 1186.3, 1421.3, 1795.4, 2283.5] :$$

Vi vil prøve at tilpasse data til et polynomium af grad 3 (det kaldes kubisk regression). I modsætning til de øvrige regressioner, skal vi her have en ekstra parameter med, nemlig polynomiets grad:

with(Gym) :
 $\text{PolyReg}(X, Y, 3)$



Hvis du kun vil have funktionsudtrykket benyttes:

$\text{PolyReg}(X, Y, 3, x)$

$$0.00650252525252528 x^3 - 0.739531385281388 x^2 + 48.9615764790766 x - 235.900000000001 \quad (8.8)$$

Udregning af værdier vha. regressionsudtrykket kan ske blot ved at erstatte variabelen med et tal. Fx er er

$$\text{PolyReg}(X, Y, 3, 55) = 1301.76190476190$$

OBS:

En polynomiell regression af grad 2 er præcis det samme som en kvadratisk regression.

8.8 Proportional regression

En proportional regression er en lineær regression, hvor regressionslinjen går gennem $(0, 0)$.

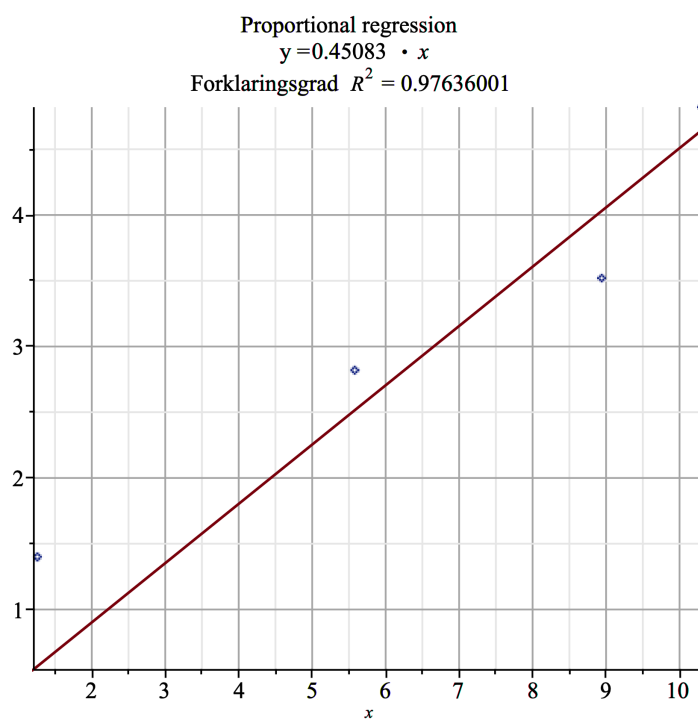
Antag, at vi har følgende måledata:

$$L1 := [1.26, 5.58, 8.94, 10.3] :$$

$$L2 := [1.4, 2.82, 3.52, 4.82] :$$

En proportional regression laves da med kommandoen

with(Gym) :
 PropReg(L1, L2)



Hvis du kun vil have funktionsudtrykket benyttes:

$PropReg(L1, L2, x)$

$$0.4508342416 \cdot x$$

(8.9)

Udregning af værdier vha. regressionsudtrykket kan ske blot ved at erstatte variablen med et tal. Fx er er

$$PropReg(L1, L2, 8) = 3.606673933$$

8.9 Andre typer: x^2 regression

Vi ønsker at tilpasse disse data

$X := [0, 10, 15, 20, 25, 30, 35] :$

$Y := [0, 39, 91, 164, 251, 367, 503] :$

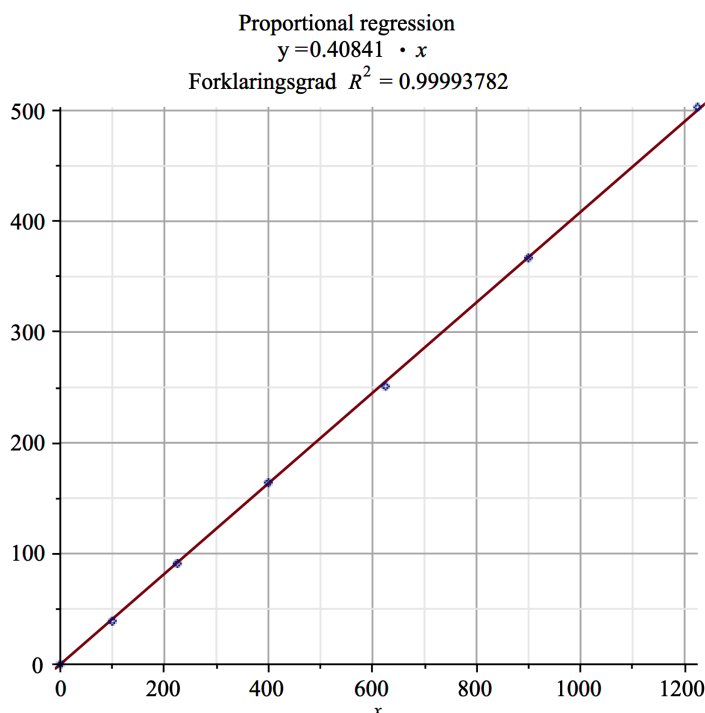
til en parabel gennem $(0, 0)$, dvs. grafen for en funktion af formen $f(x) = k \cdot x^2$. Umiddelbart kunne man tro, at en potens regression ville være anvendelig, men da en potensfunktion kun er defineret for positive værdier, kan vi selvfølgelig ikke have $(0, 0)$ som datapunkt. Desuden kan vi ikke fastholde potensen til 2.

Vi ønsker altså en sammenhæng af formen $y = k \cdot x^2$, men dette er jo en proportionalitet mellem y og x^2 . Dvs., hvis vi laver proportional regression på listerne

$X2 := [0^2, 10^2, 15^2, 20^2, 25^2, 30^2, 35^2] = [0, 100, 225, 400, 625, 900, 1225]$

og Y , kan vi bestemme k :

$PropReg(X2, Y)$



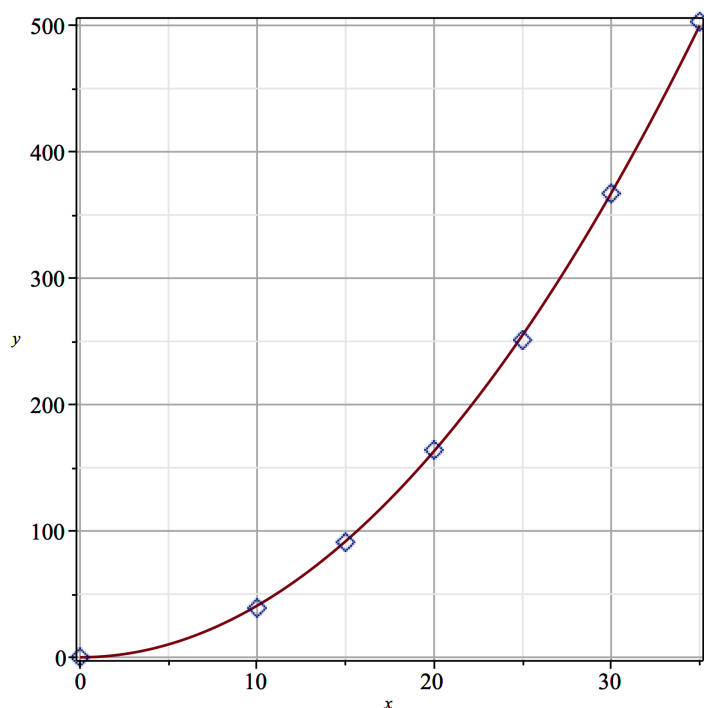
Den ønskede regressionsfunktion er altså

$f(x) := 0.408 x^2$

$$f := x \mapsto 0.408 \cdot x^2 \quad (8.10)$$

Det er ikke helt nemt at tegne grafen sammen med datapunkterne. Nedenfor har du noget kode, du sagtens kan rette til, hvis du skal bruge metoden i forbindelse med en anden regression.

```
plot1 := plot(f(x), x = 0 .. 35, y = 0 .. 500) :
plot2 := Statistics[ScatterPlot](X, Y, symbolsize = 20) :
plots[display](plot1, plot2, gridlines)
```



Hvis der er mange datapunkter, er det ikke så sjovt at skulle sætte alle x -data i anden potens manuelt. Maple en indbygget funktion, der er gearet til dette:

$$\text{map}(x \rightarrow x^2, X) = [0, 100, 225, 400, 625, 900, 1225]$$

– eller definer funktionen

$$g(x) := x^2 :$$

og anvend denne på hele listen X :

$$g \sim (X)$$

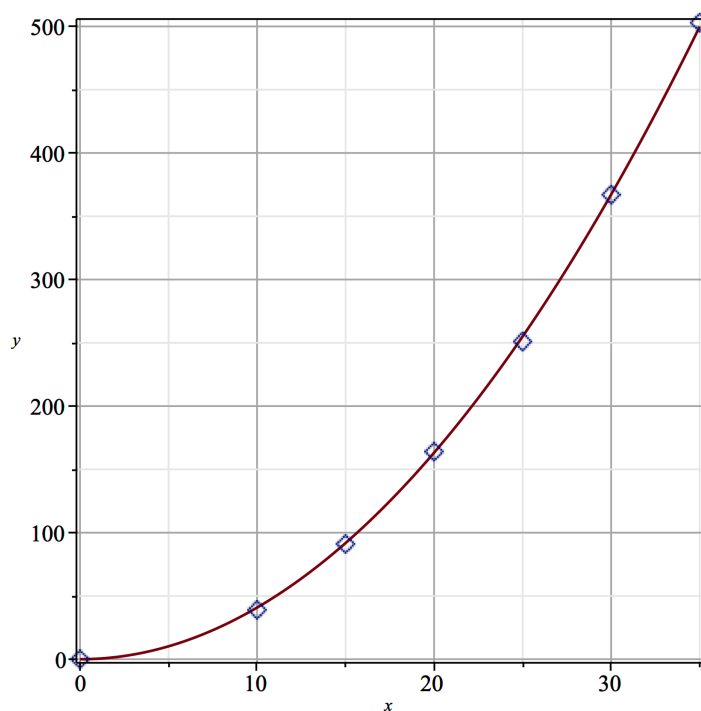
$$[0, 100, 225, 400, 625, 900, 1225]$$

(8.11)

Teknikken, der er vist i dette afsnit, kan nemt anvendes i andre sammenhænge. Hvis du fx skal tilpasse data til sammenhængen $y = k \cdot x^3$, så laver du proportional regression på x -listen 3. potens og y -listen. Det vil umiddelbart give dig k .

Alt dette er indbygget i koomandoen *PropReg*, men det ovenstående er nødvendigt for at kunne forstå, hvad der forgår. Med den udvidede kommandoe vil det se sådan ud:

$\text{PropReg}(X, Y, \text{grad} = 2)$



Du kan finde flere detaljer i online hjælpen til PropReg.

8.10 Sådan får du fat i regressionskoefficienterne

Hver gang du udfører en regression med en af regressionerne i Gym-pakken vil en global (skrivebeskyttet) variabel med navnet *reg_koeff* blive opdateret. Herved vil du, ved blot at taste *reg_koeff* få vist regressionskoefficienterne.

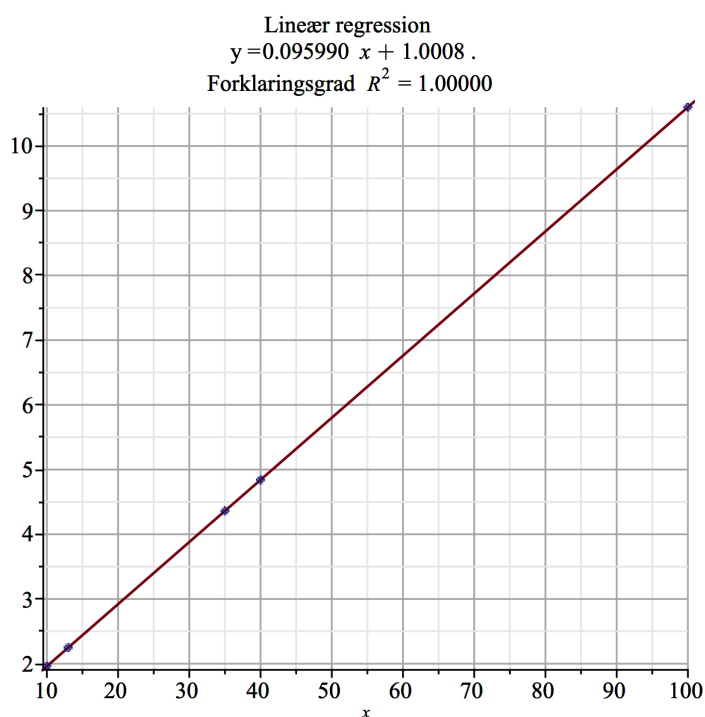
Fx ved en lineær regression

with(Gym) :

$X := [10, 13, 35, 40, 100]$:

$Y := [1.96, 2.25, 4.36, 4.84, 10.6]$:

$\text{LinReg}(X, Y)$



$$\text{reg_coeff} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00080103555928 \\ 0.0959898728394121 \end{bmatrix}$$

Hvis du herefter laver fx en kvadratisk regression med

$\text{KvadReg}(X, Y, x)$

$$3.41431977171195 \times 10^{-7} x^2 + 0.0959514250457772 x + 1.00142942612541 \quad (8.12)$$

så er indholdet af reg_coeff ændret:

$$\text{reg_coeff} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00142942612541 \\ 0.0959514250457772 \\ 3.41431977171195 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

9 Residualanalyse

9.1 Residualer og residualplot

Når man skal vurdere, om en model passer godt til de observerede data, er det ikke altid nok blot at se på forklaringsgraden.

Vi vil undersøge, om der er en lineær sammenhæng mellem X og Y :

$X := [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70]$

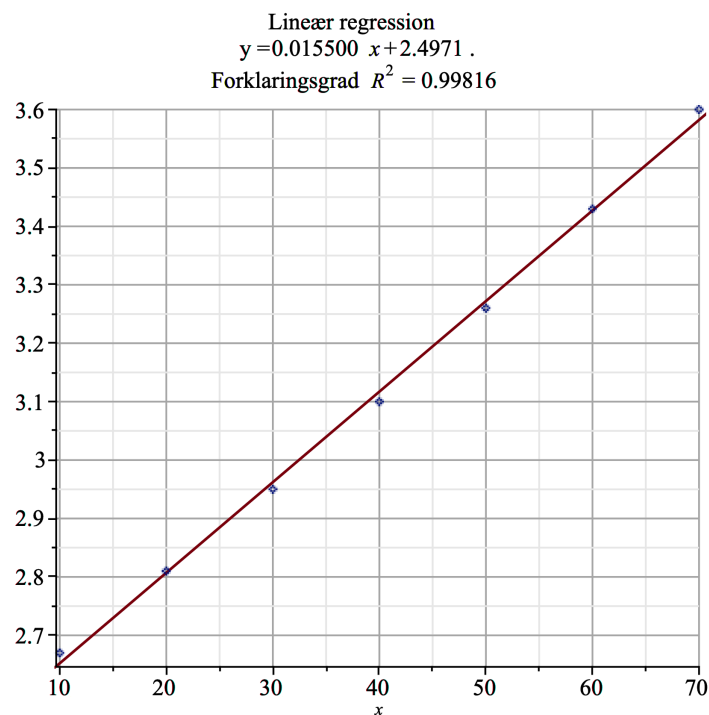
$X := [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70]$ (9.1)

$Y := [2.67, 2.81, 2.95, 3.10, 3.26, 3.43, 3.60]$

$Y := [2.67, 2.81, 2.95, 3.10, 3.26, 3.43, 3.60]$ (9.2)

$with(Gym) :$

$LinReg(X, Y)$



Umiddelbart ser det jo strålende ud med en forklaringsgrad på så godt som 1. Lad os tage et kig på residualerne

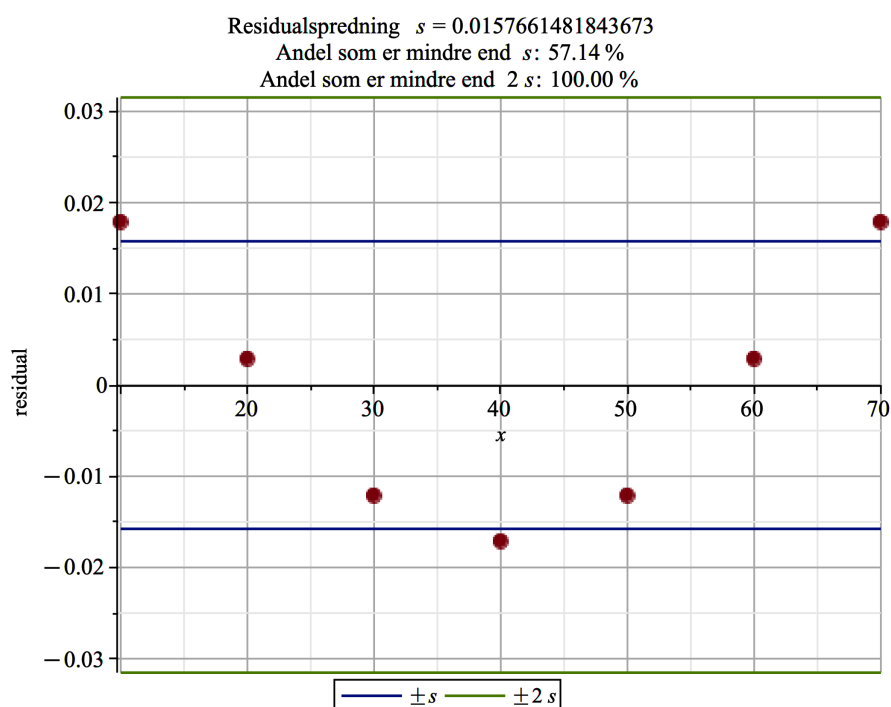
$\text{residualer}(X, Y, \text{LinReg})$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0.0178571428571441 \\ 20 & 0.00285714285714400 \\ 30 & -0.0121428571428561 \\ 40 & -0.0171428571428565 \\ 50 & -0.0121428571428570 \\ 60 & 0.00285714285714311 \\ 70 & 0.0178571428571428 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

hvor vi i den første søjle har X -værdierne og i den anden søjle de tilhørende residualer. Det kan være svært at danne sig et overblik residualerne, men det falder umiddelbart i øjnene, at de midterste datapunkter ligger under regressionslinjen, mens yderpunkterne i begge sider ligger over. Kigger vi godt efter, kan vi også se dette på ovenstående graf.

Langt tydeligere bliver det, hvis vi plotter residualerne i et koordinatsystem med X -værdierne på x -aksen og residualer på y -aksen. Plottet, vi får frem, kaldes et residualplot:

$\text{plotResidualer}(X, Y, \text{LinReg})$



Her kan vi tydeligt se, at den lineære model ikke er god, idet residualerne viser en systematisk afvigelse med en 'hængebug', der nøje svarer til det oprindelige plot – blot forstørret.

Residualplots er velegnede til visuel modelkontrol. De systematiske afvigelser, man specielt skal være på udkig efter, er en 'hængebug', der både kan vende op og ned, en 'trompet', hvor afvigelserne bliver større og større, men med modsat fortegn. Mange andre former for systematik kan forekomme.

9.2 Residualspredning

Vi ser her på et konkret eksempel:

Hvert år, i en årrække, har man udtaget en stikprøve blandt de lam, der skal slagtes, og målt den gennemsnitlige vægt

År	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gennemsnitlig vægt	41.0	41.4	42.2	42.7	42.4	44.2	44.4	45.7	46.0

Først indtastes data i to lister:

$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

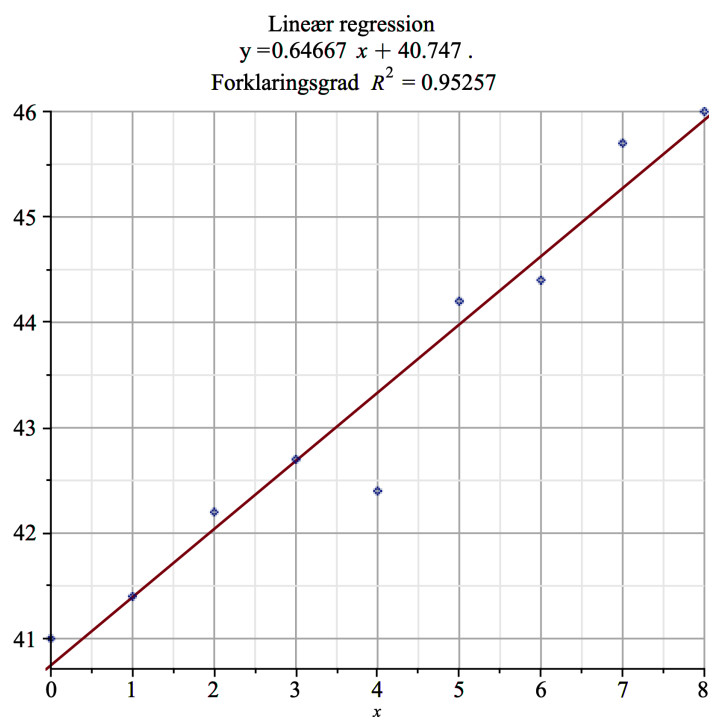
$$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] \quad (9.4)$$

$Y := [41.0, 41.4, 42.2, 42.7, 42.4, 44.2, 44.4, 45.7, 46.0]$

$$Y := [41.0, 41.4, 42.2, 42.7, 42.4, 44.2, 44.4, 45.7, 46.0] \quad (9.5)$$

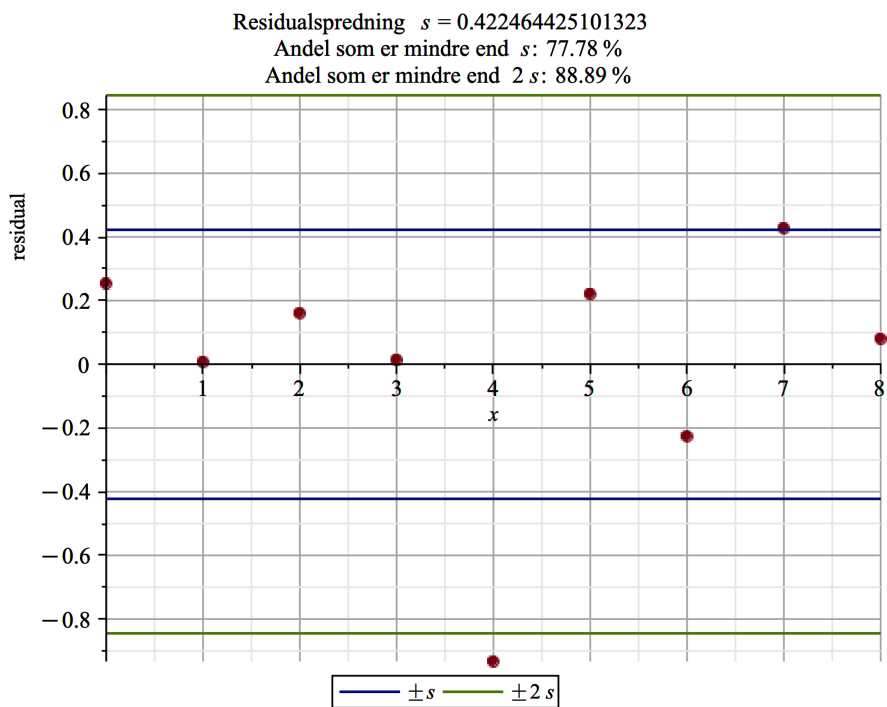
Vi foretager lineær regression på de to lister

$\text{LinReg}(X, Y)$



Residualplottet ser sådan ud:

`plotResidualer (X, Y, LinReg)`



Residualspredningen beregnes direkte med kommandoen

`residualspredning (X, Y, LinReg) = 0.422464425101323`

Residualplottet viser, at residualerne ligger tilfældigt omkring 0 uden systematiske afvigelser.

Dette sammenholdt med en gennemsnitlig fejl på 0.42 kg viser, at den lineære model kan benyttes til at beskrive udviklingen.

10 Differentialregning

10.1 Afledet funktion og differentialkvotient

Det er meget simpelt at differentiere en funktion i Maple. Hvis fx en funktion er givet ved:

$$f(x) := x^2 - 4\sqrt{x}$$
$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x} \quad (10.1)$$

Så finder du den afledede af f ved blot at skrive $f'(x)$, og trykke Enter (eller udregne in-line)

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Skal du fx bruge differentialkvotienten i $x = 2$, ja, så udregner du blot:

$$f'(2) = 4 - \sqrt{2}$$

– og du behøver faktisk ikke at have udregnet $f'(x)$ først.

10.2 Tangentbestemmelse

Skal du fx bestemme tangenten til grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$$

i punktet med førstekoordinaten 4, definerer du først funktionen:

$$f(x) := x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$$
$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x} \quad (10.2)$$

Dernæst opskriver du tangentligningen ved at indsætte $x_0 = 4$ i det generelle udtryk for tangentligningen:

$$y = f'(4) \cdot (x - 4) + f(4)$$

$$y = \left(8 - \frac{\sqrt{4}}{2} \right) (x - 4) + 8 \quad (10.3)$$

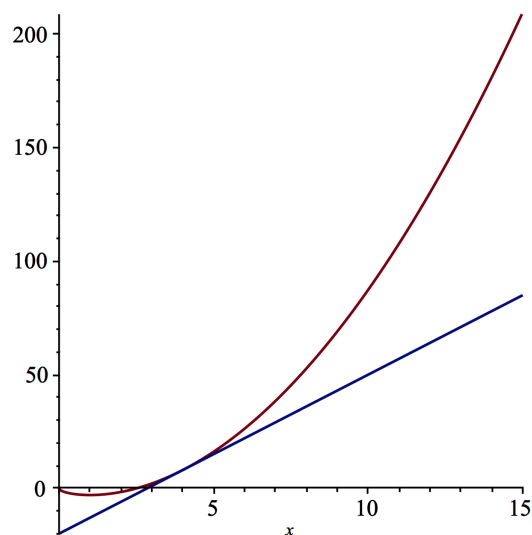
simplify

$$y = 7x - 20 \quad (10.4)$$

For at plotte grafen for f sammen med tangenten kan vi benytte den almindelige plot-kommando, men ikke helt problemfrit. Det hænger sammen med, at *plot*-kommandoen kun plotter funktioner – og ikke ligninger.

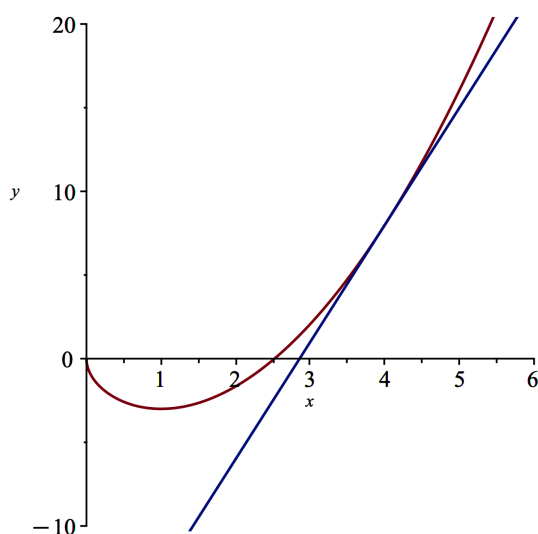
Hvis du **kun** skriver højresiden af tangentens ligning $y = 7x - 20$ ind i plot-funktionen, så tror Maple, at det er to funktioner der skal plottes:

`plot([f(x), 7 x - 20])`



Og det ser sådan set overbevisende nok ud, men hvis du vil have tangeringen tegnet lidt tydeligere, så skal du indstille akserne – fx således:

`plot([f(x), 7 x - 20], x = 0 .. 6, y = -10 .. 20)`



Akserne er ændret, så der kun tegnes i intervallet $[0, 6]$. Desuden er y-aksen begrænset til intervallet $[-10, 20]$.

10.3 Tegning med Smart Plot

Denne nemmeste måde at plotte en funktion på, er at indsætte et tomt koordinatsystem og derefter trække funktionsudtrykket til plottet. Det foregår sådan her (hvis opgaven er at tegne grafen for funktionen f sammen med tangenten i $x = 4$):

$$f(x) := x^2 - 4\sqrt{x}$$

$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$$

(10.5)

$$y = 7x - 20$$

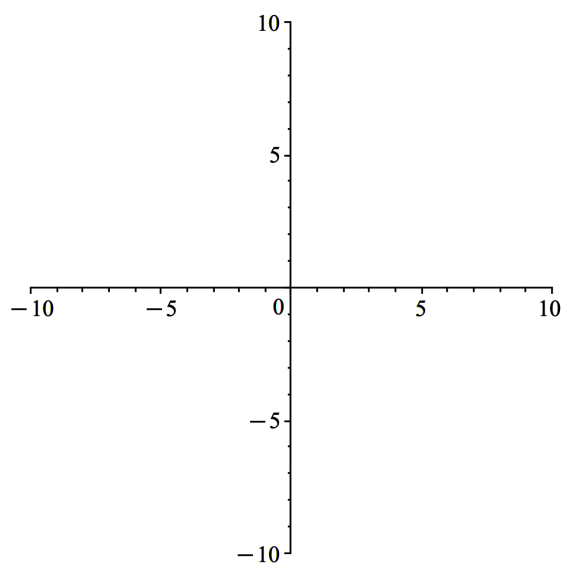
$$y = 7x - 20$$

(10.6)



Gå til **Insert**-fanebladet, hvor du ude til højre finder ikonen for et **2-D plot**:

Klik på ikonen for et 2-D plot og straks vil du få indsat et tomt koordinatsystem ved cursorpositionen:



Herefter markerer du funktionsudtrykket for f :

$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$$

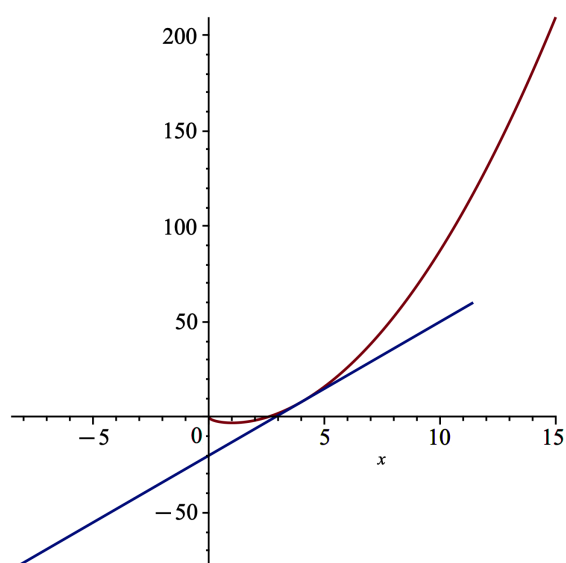
og trækker det ind i det tomme koordinatsystem – og straks er en del af grafen tegnet.

Herefter gør du det samme med tangentligningen: Marker højre side af ligningen

$$y = 7x - 20$$

og træk dette ind i koordinatsystemet.

Det vil komme til at se sådan ud:



Herefter kan du bruge kontekstmenuen til at justere akser mm. Du får kontekstmenuen i højre side af skærmen frem ved at klikke i koordinatsystemet.

TIP: Hvis det funktionsudtryk, du skal tegne grafen for, befinder sig langt fra koordinatsystemet, kan du tage en kopi af funktionsudtrykket og 'paste' det ind i koordinatsystemet.

10.4 Tangentbestemmelse med Gym-pakken

Med kommandoen *tangent* fra Gym-pakken bliver ovenstående beregninger automatiseret.

Vi benytter den samme funktion:

$$f(x) := x^2 - 4\sqrt{x}$$

$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x} \quad (10.7)$$

with(Gym) :

tangent(f(x), x = 4)

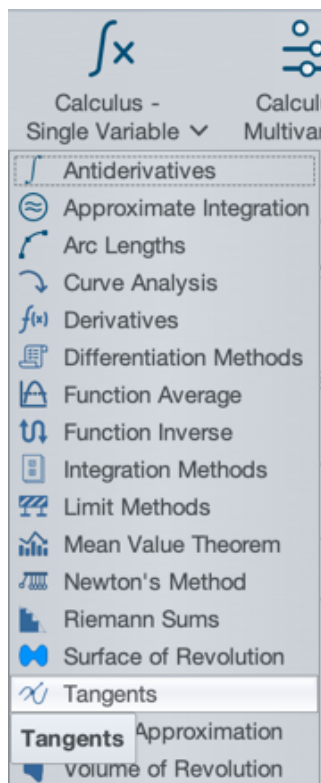
$$y = 7x - 20 \quad (10.8)$$

Tegning af grafen sammen med tangenten foregår som beskrevet ovenfor.

10.5 Tangent Secant Tutor

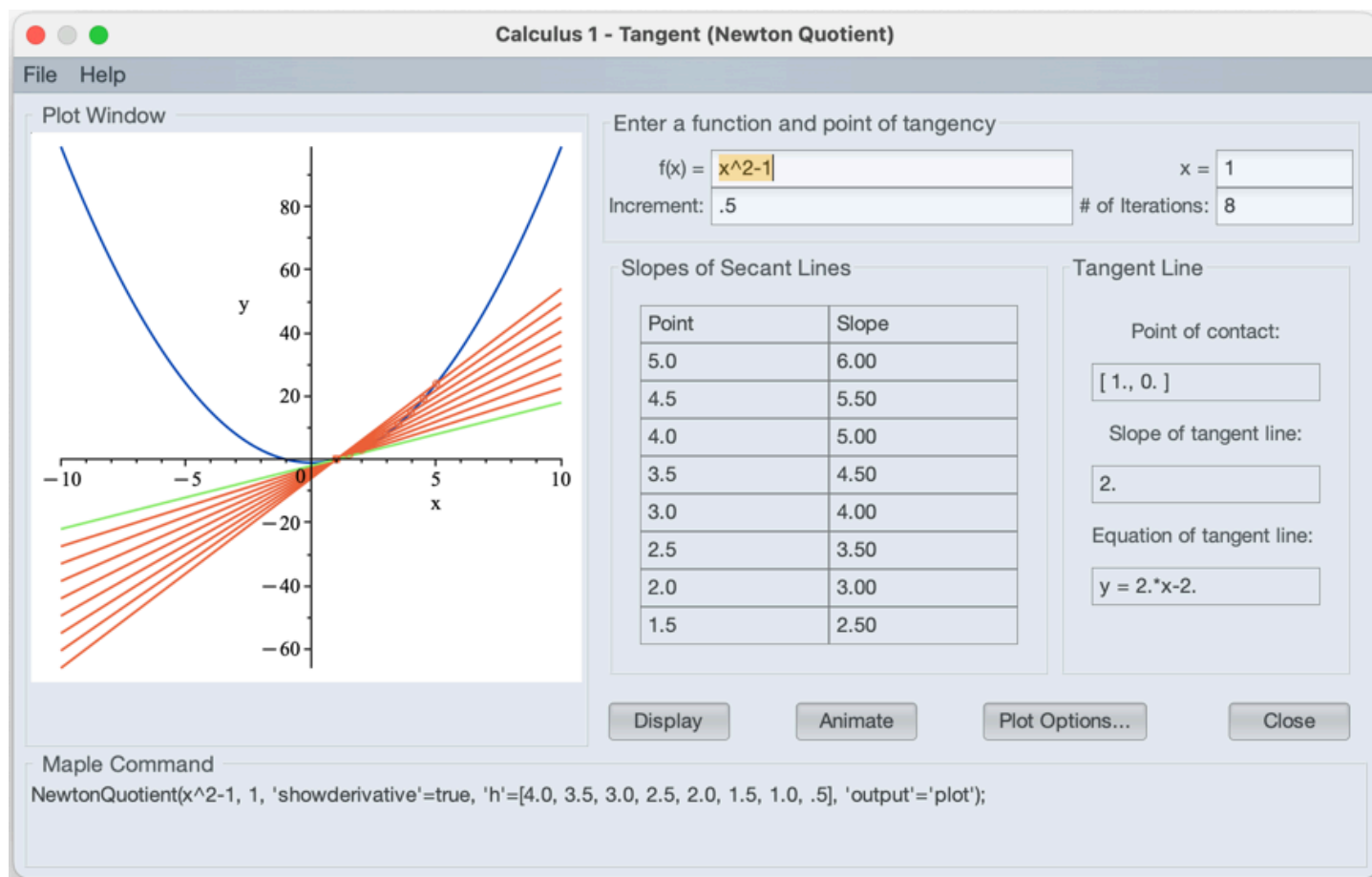
Hvis du vil arbejde med forståelsen af en tangent som en grænselinje for sekanter, så kan denne Tutor anbefales.

Du finder Tutoren i fanebladet Education Tools. Her trykker du på knappen **Calculus Single-Variable**:



Og vælger **Tangents**. Du kan også starte ved at trykke Enter efter nedenstående linje (du skal først gøre linjen aktiv ved at klikke i den og skifte fra 'Nonexecutable Math' til 'Math' ved at taste Shift+F5):

Student [*Calculus1*] [*TangentTutor*] ()



Du skal være opmærksom på, at indtastningen ikke er helt så let i indtastningsfeltet for $f(x)$. Her er du nødt til at skrive x^2 for x^2 , x^3 for x^3 , osv.

Hvis du fx vil undersøge funktionen $f(x) = x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$, skal du indtaste: $x^2-4*\text{sqrt}(x)$, hvor sqrt er en forkortelse af squareroot.

TIP:

Hvis du har den tilsvarende funktion defineret i et Maple dokument som $f(x)$, kan du blot skrive $f(x)$ i indtastningsfeltet.

10.6 Monotoniforhold

Du kan benytte den afledede funktion $f'(x)$ som enhver anden funktion – fx kan du finde nulpunkter og fortegn.

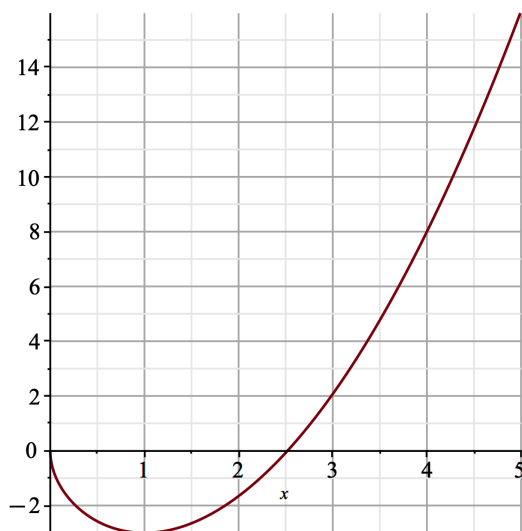
Lad os bestemme monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen:

$$f(x) := x^2 - 4 \cdot \sqrt{x}$$

$$f := x \mapsto x^2 - 4 \cdot \sqrt{x} \quad (10.9)$$

Tegn først grafen for f i et passende interval, så alle ekstremer ses. Det er vigtigt, at du får tegnet i et fornuftigt interval – ofte lader man Maple bestemme, hvorefter man eksperimenterer man lidt.

$$\text{plot}(f(x), x = 0 .. 5)$$



Dernæst bestemmes nulpunkter og fortegn for f' :

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 1\}$$

Løsningen til ligningen $f'(x) = 0$ sammenholdt med grafen for f viser, at

f er aftagende i intervallet $[0, 1]$

f er voksende i intervallet $[1, \infty[$

f har lokalt minimum i 1, og $f(1) = -3$.

Læg mærke til, at vi slet ikke har udregnet $f'(x)$. Det er ikke nødvendigt, men der sker da ikke noget ved at gøre det. Skriv blot

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Alternativt kan du gå sådan til værks:

$$\text{solve}(f'(x) > 0, x)$$

$$(1, \infty) \quad (10.10)$$

$$\text{solve}(f'(x) < 0, x)$$

$$(0, 1) \quad (10.11)$$

Parenteserne skal her læses som åbne intervaleklammer. Det ser unægtelig underligt ud, at ∞ medregnes i det første interval, men det skal tilskrives at den Nordamerikanske notation for intervaller afviger fra vores. Under alle omstændigheder viser resultaterne, at:

$f'(x)$ er negativ i intervallet $]0, 1[$ og positiv i intervallet $]1, \infty[$.

Heraf følger, at

f er aftagende i intervallet $[0, 1]$

f er voksende i intervallet $[1, \infty[$

f har lokalt minimum i 1, og $f(1) = -3$.

OBS: Hvis du løser ulighederne ved at klikke og vælge solve i kontekstmenuen, får du ikke intervallerne, men blot en ulighed, hvor notationen er helt indlysende:

$$f'(x) > 0$$

$$0 < 2x - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (10.12)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$\{1 < x\} \quad (10.13)$$

$$f'(x) < 0$$

$$2x - \frac{2}{\sqrt{x}} < 0 \quad (10.14)$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

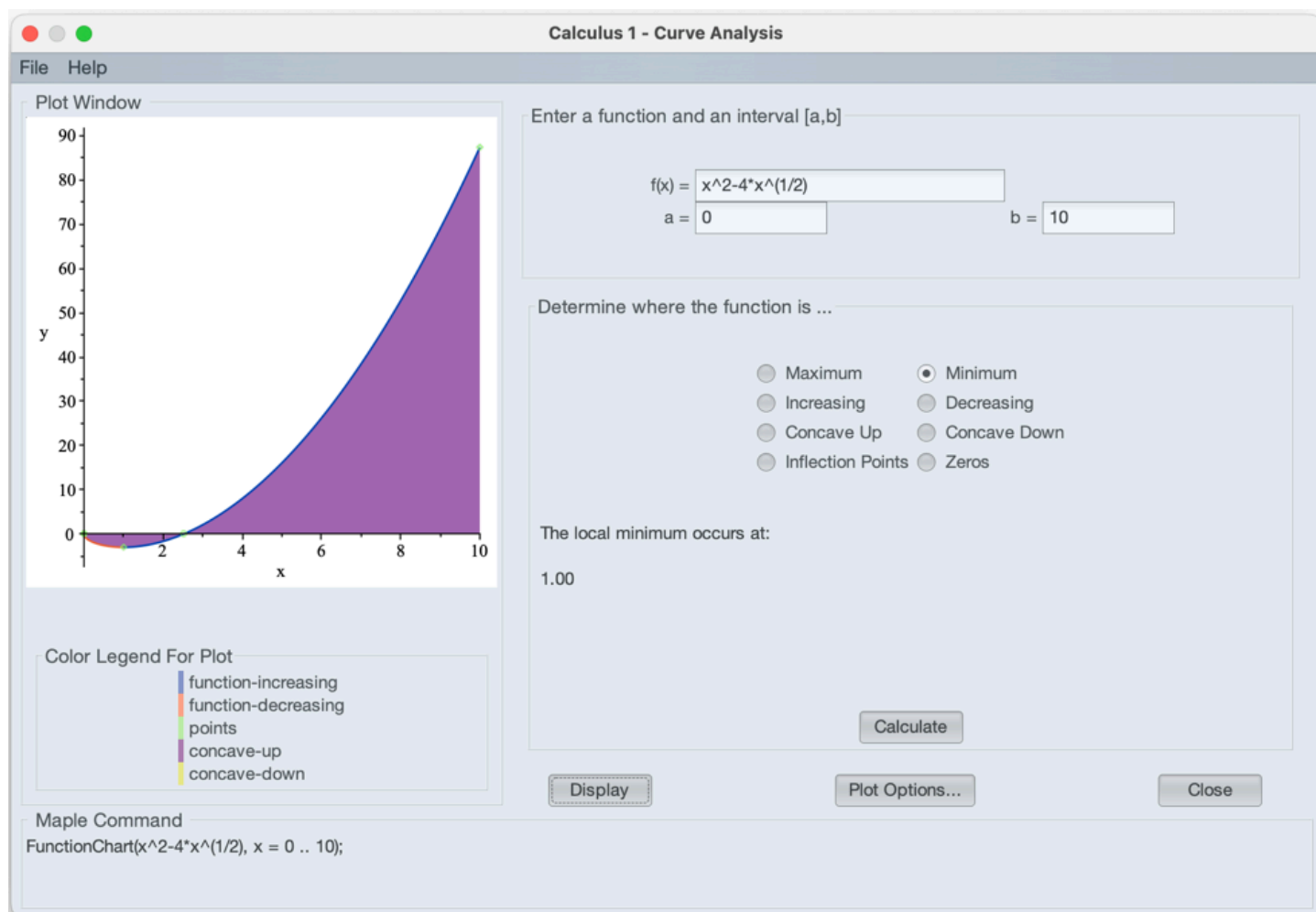
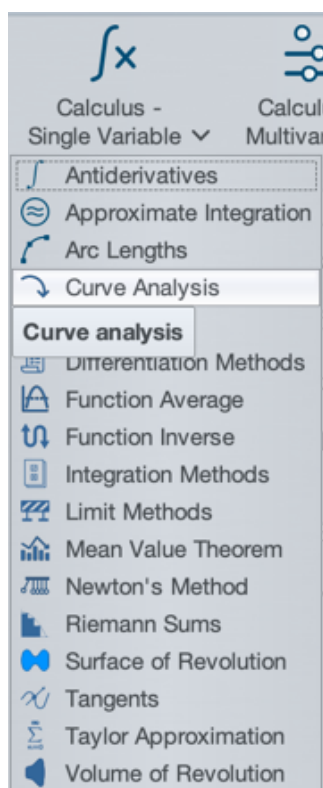
$$\{0 < x, x < 1\}$$

10.7 Curve Analysis Tutor

Med denne Tutor kan du meget hurtigt lave en funktionsundersøgelse.

Du finder Tutoren i fanebladet **Education** Her trykker du på knappen **Calculus Single-Variable** og vælger **Curve Analysis** i listen.

Du får nedenstående dialog frem (hvor den aktuelle funktion dog er indtastet):



10.8 Eksempler

10.8.1 Eksempel 1

Vis, at linjen med ligningen $y = x - \frac{3}{4}$ er tangent til grafen for $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

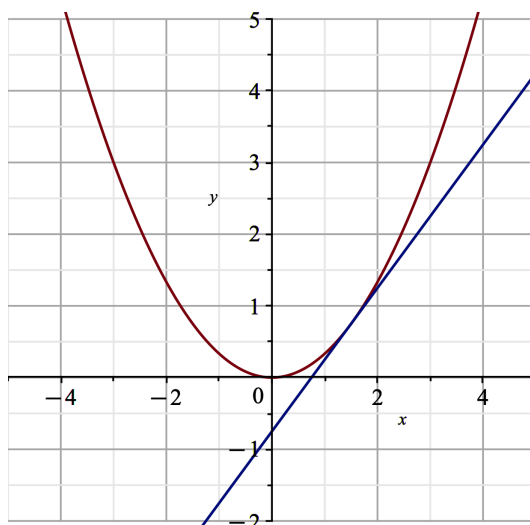
Løsning:

Lad os først prøve at tegne parablen og linjen for at se, om det ser rimeligt ud:

$$f(x) := \frac{1}{3}x^2$$

$$f := x \mapsto \frac{x^2}{3} \quad (10.15)$$

$$\text{plot}\left(\left[f(x), x - \frac{3}{4}\right], x = -5 \dots 5, y = -2 \dots 5\right)$$



Og jo, det ser meget rimeligt ud, men et bevis er det ikke. Det er nedenstående argument til gengæld:

Tangenten har hældningen 1, så du skal på jagt efter et punkt på parablen med hældningen 1 – dvs., at du skal løse ligningen $f'(x) = 1$:

$$f'(x) = 1 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{x = \frac{3}{2}\right\}$$

Dvs., at i punktet med førstekoordinaten $x = \frac{3}{2}$ er tangentens hældning 1. Tilbage er blot at bestemme tangentens ligning i punktet

med førstekoordinaten $x = \frac{3}{2}$:

$$y = f'\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = x - \frac{3}{4} \quad (10.16)$$

OBS: Du kan naturligvis bruge *tangent*-kommandoen til den sidste udregning:

with(Gym) :

$$\text{tangent}\left(f(x), x = \frac{3}{2}\right)$$

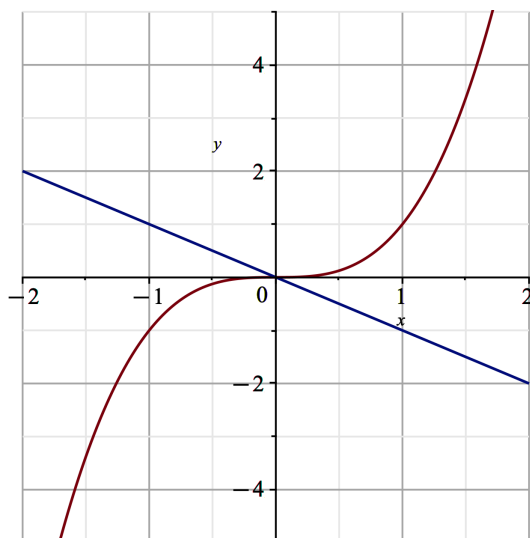
$$y = x - \frac{3}{4} \quad (10.17)$$

Bemærkning:

I det ovenstående eksempel er det i princippet ikke tilstrækkelig at argumentere for, at $y = x - \frac{3}{4}$ er en tangent ved at vise, at der netop er ét skæringspunkt mellem $y = x - \frac{3}{4}$ og grafen for f . At det så alligevel går godt, skyldes, at grafen for f er en parabel.

Hvis grafen for f ikke er en parabel, så er der ingen garanti for, at en ret linje er en tangent, hvis der netop er ét skæringspunkt. Fx vil $y = -x$ ikke være tangent til $f(x) = x^3$, selvom der kun er ét skæringspunkt:

$$\text{plot}([x^3, -x], x = -2 \dots 2, y = -5 \dots 5)$$



10.8.2 Eksempel 2

For en sten, der kastes lodret op i luften med udgangsfarten 10 m/s, kan dens højde over jorden $h(t)$ beregnes som

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

hvor t er tiden i sekunder, efter at stenen er kastet.

1. Hvor længe øges stenens højde ?
2. Hvor højt når stenen ?
3. Hvornår rammer stenen jorden ?
4. Med hvilken fart rammer stenen jorden ?
5. Hvornår er farten 5 m/s ?

Løsning:

Som det så ofte er tilfældet kan en graf give et fingerpeg om, hvilken løsningsmetode, der skal benyttes. Desuden er grafen nyttig til kontrol af resultaterne.

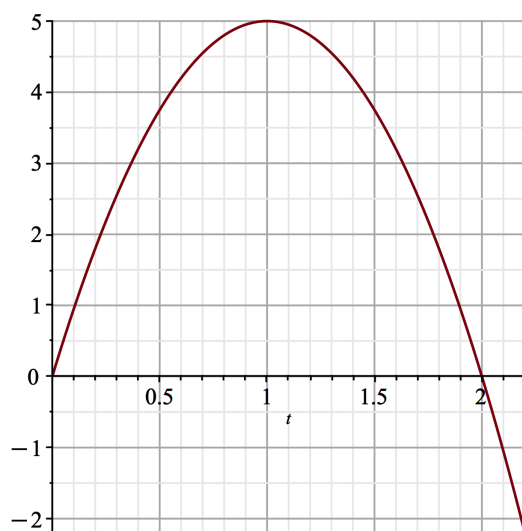
Først skal funktionen h defineres

$$h(t) := 10t - 5t^2$$

$$h := t \mapsto 10 \cdot t - 5 \cdot t^2 \quad (10.18)$$

hvorefter grafen plottes i et fornuftigt interval:

`plot(h(t), t=0..2.2, gridlines)`



Svarene på spørgsmål 1-3 kan direkte aflæses af grafen, men lad os for en god ordens skyld beregne dem.

1)

$$h'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 1\}$$

Dvs., at stenens højde øges i 1 sekund.

2)

$$h(1) = 5$$

Dette viser, at stenen når højden 5 m.

3)

$$h(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{t = 0\}, \{t = 2\}$$

Til tiden $t = 2$ vil højden over jorden være 0 m. Dvs., at stenen rammer jorden efter 2 sekunder.

4)

$$h'(2) = -10$$

Stenen rammer jorden med en fart på 10 m/s. ($h'(t)$ angiver hastigheden til tiden t , så det negative fortegn skal tolkes som 'nedad')

5)

$$h'(t) = 5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{t = \frac{1}{2}\right\}$$

$$h'(t) = -5 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ t = \frac{3}{2} \right\}$$

Til $t = \frac{1}{2}$ sekund og til $t = \frac{3}{2}$ sekunder er farten 5 m/s.

10.8.3 Eksempel 3

En model for højdeudviklingen hos drenge mellem 0 og 16 år er givet ved:

$$h(t) = \sqrt{1695t + 2500}, \quad 0 \leq t \leq 16$$

hvor t er alderen i år, og $h(t)$ er højden i cm.

a) Hvilken højde har en dreng på 9 år iflg. modellen?

b) Angiv væksthastigheden til $t = 3$.

c) Gør rede for, at væksthastigheden er aftagende.

Løsning:

Først defineres funktionen h (definitionsintervallet $0 \leq t \leq 16$ skal ikke medtages her)

$$h(t) := \sqrt{1695t + 2500}$$

$$h := t \mapsto \sqrt{1695 \cdot t + 2500} \quad (10.19)$$

a)

$$h(9) = \sqrt{17755} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 133.25$$

En 9-årig dreng har iflg. modellen en højde på 133 cm.

b)

Væksthastigheden til tiden $t = 3$ bestemmes som

$$h'(3) = \frac{339 \sqrt{7585}}{3034} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 9.7308$$

Væksthastigheden til $t = 3$ er 9.7 cm. pr. år.

c)

For at bestemme monotoniforhold for væksthastigheden $h'(t)$ skal du bruge $h''(t)$:

$$h''(t) = -\frac{2873025}{4(1695t + 2500)^{3/2}} \quad (10.20)$$

Det ses umiddelbart, at $h''(t) < 0$ for alle t , $0 \leq t \leq 16$. Derfor er $h'(t)$ aftagende.

Du kan naturligvis benytte Maple til dette, ved at løse uligheden

$\text{solve}(\{h''(t) < 0, 0 < t < 16\}, t)$

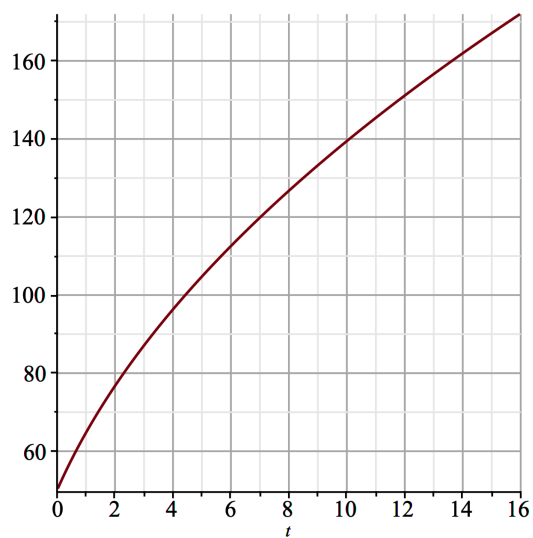
$$\{0 < t, t < 16\}$$

(10.21)

Løsningen er alle t i intervallet $]0, 16[$.

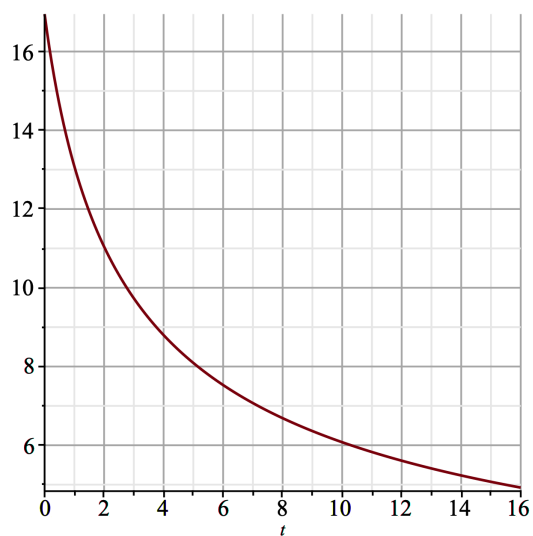
Selvom det ikke er tvingende nødvendigt i en opgave som denne, er det alligevel altid en god ide at tegne graferne :

$\text{plot}(h(t), t = 0 \dots 16, \text{gridlines})$



Og grafen for væksthastigheden ser sådan ud

$\text{plot}(h'(t), t = 0 \dots 16, \text{gridlines})$



11 Analytisk geometri

11.1 Punkter i et koordinatsystem

Et punkt P med koordinaterne $P = (x, y)$ skrives i Maple på formen $P = [x, y]$ – altså ved brug af kantede parenteser. Kommer du til at benytte de runde parenteser i en definition af et punkt i Maple, så ignoreres parenteserne og du får ikke defineret noget punkt.

Lad os definere nogle punkter og få dem afsat i et koordinatsystem:

$$A := [-2, 1]$$

$$A := [-2, 1] \quad (11.1)$$

$$B := [2, 3]$$

$$B := [2, 3] \quad (11.2)$$

$$C := [-3, -2]$$

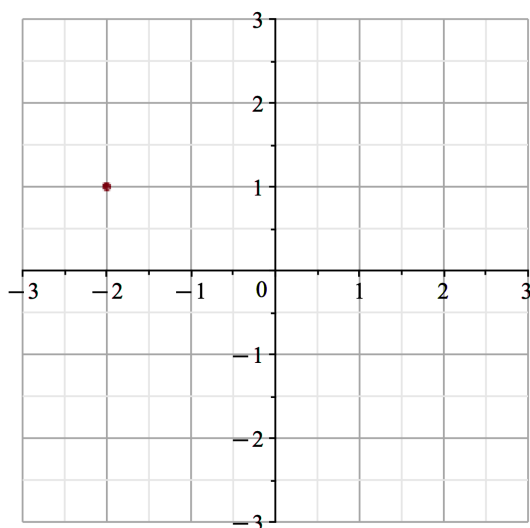
$$C := [-3, -2] \quad (11.3)$$

Til at plotte punkter vil vi her benytte kommandoen *punktPlot* fra Gym-pakken, så vi indlæser Gym-pakken først:

with(Gym) :

Punkter, du vil plotte, skal pakkes ind i kantede parenteser – også selvom der kun er tale om et enkelt punkt:

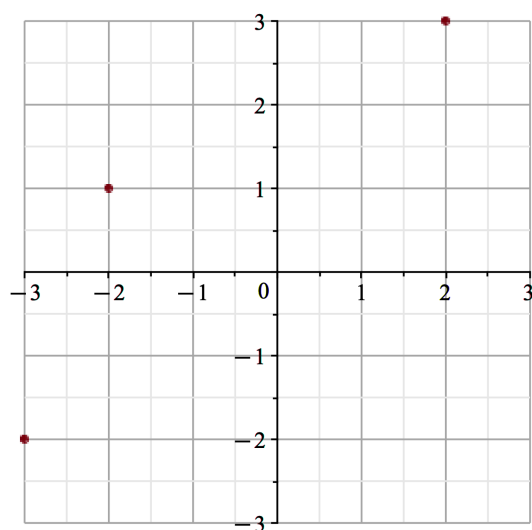
punktPlot ($[A]$, *view* = $[-3 \dots 3, -3 \dots 3]$, *size* = $[300, 300]$)



Tilføjjelsen *view* = $[-3 \dots 3, -3 \dots 3]$ betyder blot, at koordinatsystemet skal tegnes, så x-aksen går fra -3 til 3 og det samme med y-aksen. Denne tilføjelse er ofte unødvendig, når der tegnes flere punkter.

Lad os prøve at tegne alle 3 punkter på én gang:

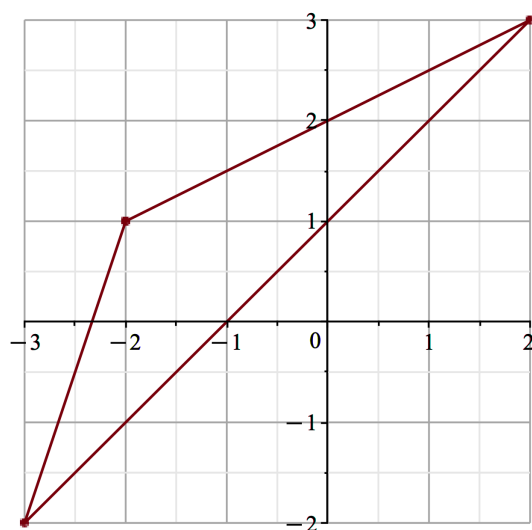
punktPlot ($[A, B, C]$, *view* = $[-3 \dots 3, -3 \dots 3]$, *size* = $[300, 300]$)



Her er det ikke nødvendigt at tilføje *view*, men der sker da ikke noget ved at gøre det.

Hvis vi forbinder de 3 punkter, så har en fin trekant.

`punktPlot([A, B, C, A], forbind)`

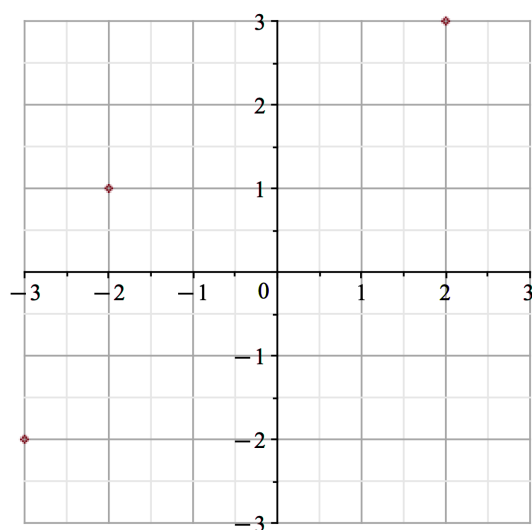


Læg mærke til det lille smarte trick med at føje *A* til i slutningen af listen. Herved forbindes *A* med *B*, *B* med *C* og endelig *C* med *A*.

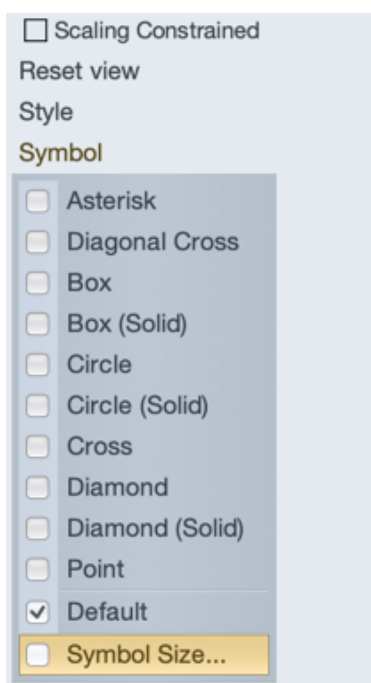
11.1.1 Brug af *plot*-kommandoen til at afsætte punkter

Alternativt kan du benytte den almindelige *plot*-kommando til at afsætte punkter i et koordinatsystem. Den vigtigste forskel er, at her bliver punkterne automatisk forbundne, så du er nødt til at tilføje *style = point* i *plot*-kommandoen:

`plot([A, B, C], style = point, view = [-3 ..3, -3 ..3], gridlines)`



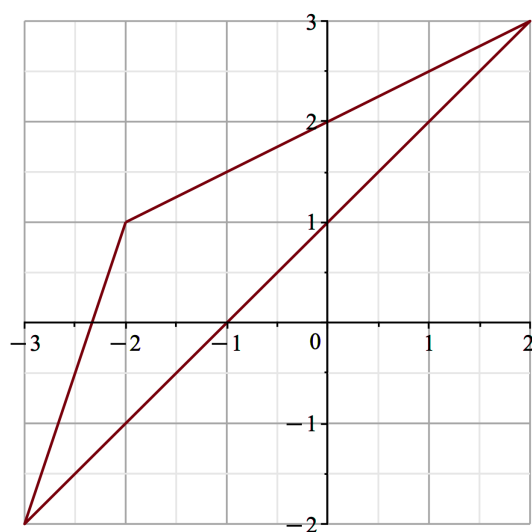
Punktsymbolerne her er ganske små, så hvis du vil lave dem større, så kan du tilføje fx `symbolsize = 14` i `plot`-kommandoen – eller indstille det i kontekstmenuen, der kommer frem, når du klikker i koordinatsystemet. Vælg først **Symbol**, så du får nedenstående liste frem:



Her kan du i øvrigt også ændre punktsymbolet til fx en firkant (Box).

Hvis du vil tegne samme trekant som ovenfor, så fjerner du `style`- og `view`-tilføjelserne og tilføjer `A` i halen af listen med punkter:

```
plot([A, B, C, A], gridlines)
```

– og vi har den samme figur som ovenfor (bortset fra, at vi ikke kan se punkterne her).

11.2 Den rette linjes ligning

Til en start vil vi benytte de samme punkter som ovenfor (her beregnet inline for at spare plads)

$$A := [-2, 1] = [-2, 1]$$

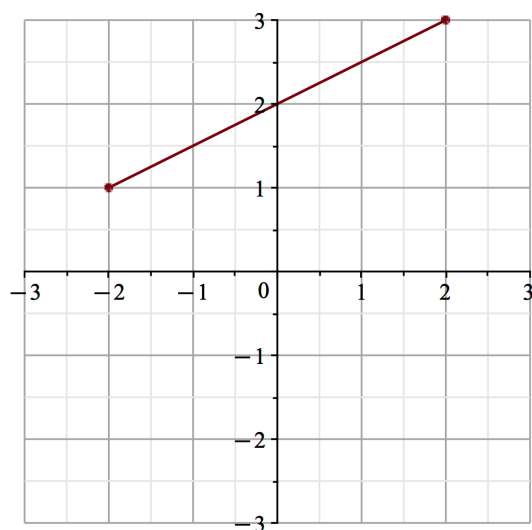
$$B := [2, 3] = [2, 3]$$

og vi vil bestemme ligningen for den rette linje gennem A og B .

Først laver vi et punktplot:

with(Gym) :

`punktPlot([A, B], forbind, view = [-3 ..3, -3 ..3], size = [300, 300])`



Allerede her kan vi se, at hvis vi fra punktet A går 2 til højre, så skal vi gå 1 op for at komme til linjen. Det betyder, at vi kan aflæse hældningen til $\frac{1}{2}$ og at linjen skærer y -aksen i 2. Således tyder det på, at linjen har ligningen $y = \frac{1}{2}x + 2$

Nu skal vi udregne linjens ligning. Hertil benytter vi formelen for hældningskoefficienten:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lader vi $[x_1, y_1]$ betegne A 's koordinater og $[x_2, y_2]$ betegne B 's koordinater, så finder vi ved indsættelse:

$$a = \frac{1 - 3}{-2 - 2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (11.4)$$

Skæring med y -aksen finder vi ved at indsætte A 's koordinater ind i formelen for b :

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

$$b = 1 - \frac{1}{2} \cdot (-2)$$

$$b = 2 \quad (11.5)$$

Altså bliver ligningen for linjen gennem A og B :

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad (11.6)$$

11.2.1 Alternativ beregning af a og b

$$A := [-2, 1] = [-2, 1]$$

$$B := [2, 3] = [2, 3]$$

Indsætter vi A 's koordinater i det generelle ligning for den rette linje $y = a \cdot x + b$, får vi

$$1 = a \cdot (-2) + b$$

$$1 = -2a + b \quad (11.7)$$

og indsætter vi B 's koordinater, får vi

$$3 = a \cdot 2 + b$$

$$3 = 2a + b \quad (11.8)$$

Begge disse ligninger skal være opfyldt, så vi kan vi kan finde a og b ved at løse to ligninger med to ubekendte:

$$\text{solve}(\{1 = -2a + b, 3 = 2a + b\})$$

$$\left\{a = \frac{1}{2}, b = 2\right\} \quad (11.9)$$

Og heraf kan vi se, at ligningen for linjen er $y = \frac{1}{2}x + 2$.

11.2.2 Med Gym-pakken

Vi benytter de samme punkter som ovenfor:

with(Gym) :

$$A := [-2, 1] = [-2, 1]$$

$$B := [2, 3] = [2, 3]$$

linje(A, B)

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad (11.10)$$

Du kan naturligvis også benytte punkternes koordinater direkte i kommandoen:

linje([-2, 1], [2, 3])

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad (11.11)$$

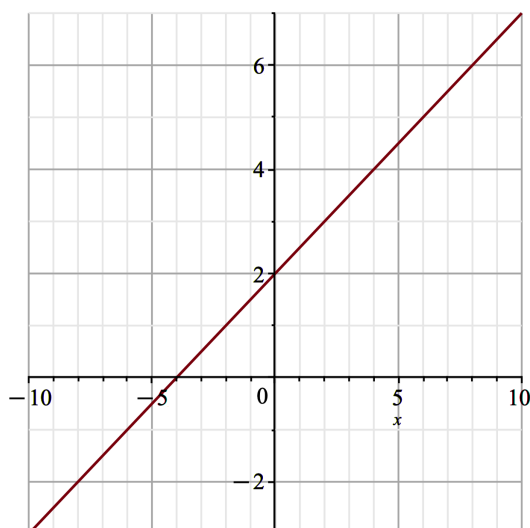
11.3 Tegning af den rette linje

Skal vi tegne den rette linje givet ved ligningen

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

i et koordinatsystem, er der flere muligheder. Det nemmeste her er at bruge *plot*-kommandoen – selvom den er beregnet til at plotte funktionsudtryk, men hvis vi kun indsætter $\frac{1}{2}x + 2$ i *plot*-kommandoen, og eventuelt justerer plotintervallet, så vil vi få det ønskede plot:

$$\text{plot}\left(\frac{1}{2}x + 2, x = -10 \dots 10\right)$$



Det vil gå godt for alle rette linjer – undtagen de lodrette, der jo ikke kan opfattes som en funktionsgraf.

Der findes en kommando i Maple, der hedder *implicitplot*, som er beregnet til at plotte objekter givet ved ligninger. Denne kommando er noget mere besværlig at bruge, så vi venter lidt med at se på den

11.3.1 Smart Plot

Med Maple's Smart Plot er det meget nemt at tegne grafen for fx:

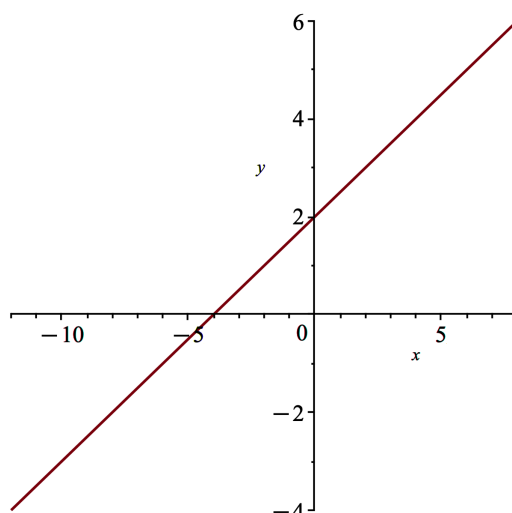
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$y = \frac{x}{2} + 2 \quad (11.12)$$

Gå til **Insert**-fanen og vælg **Plots**. herved kommer nedenstående valgmuligheder frem. Væl her **2-D Plot**:



der giver dig et tomt koordinatsystem, hvor både x - og y -intervallet er $[-10, 10]$. Hvis du trækker den ovenstående blå ligning til det tomme koordinatsystem, vil linjen blive tegnet:



Læg mærke til, at indstillingen af koordinataksene er ændret. Det gælder også, hvis linjen falder uden for standardvinduet.

Alternativt kan du trække den oprindelige (sorte) ligning til plottet, men her skal du holde Ctrl-tasten (mac option) tasten nede medens du trækker. Ellers forsvinder ligningen. Du kan også Copy&Paste ligningen ind i plottet.

Læg også mærke til, at når plottet er aktivt, så vises denne linje øverst i skærbilledet:



Ser du ikke denne linje, så klik i plottet, hvorefter den vil komme frem.

Her kan du zoome ind og ud, panorere – og meget andet. Fx vil et tryk på blå gitter  anbringe 'gridlines' i dit plot.

11.3.2 Eksempel

Tegn linjen gennem punkterne $(-3, -1)$ og $(12, 34)$.

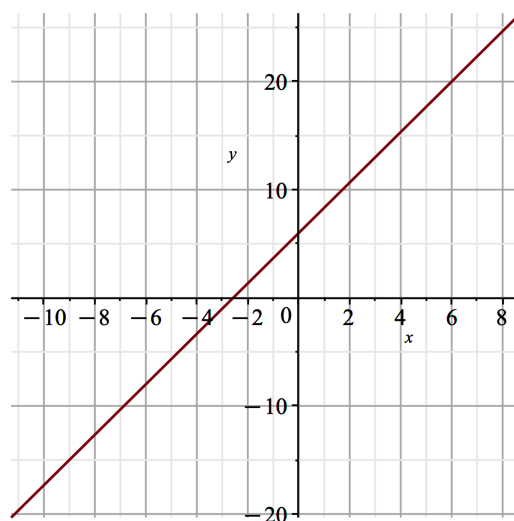
Først finder vi ligningen for linjen (husk, at der skal bruges kantede parenteser om koordinaterne):

with(Gym) :

linje([-3, -1], [12, 34])

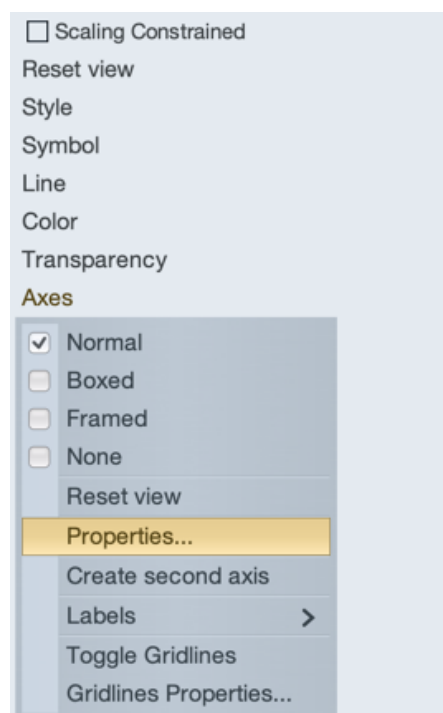
$$y = \frac{7x}{3} + 6 \quad (11.13)$$

Indsæt et 2-D Plot og træk ligningen til det tomme plot:

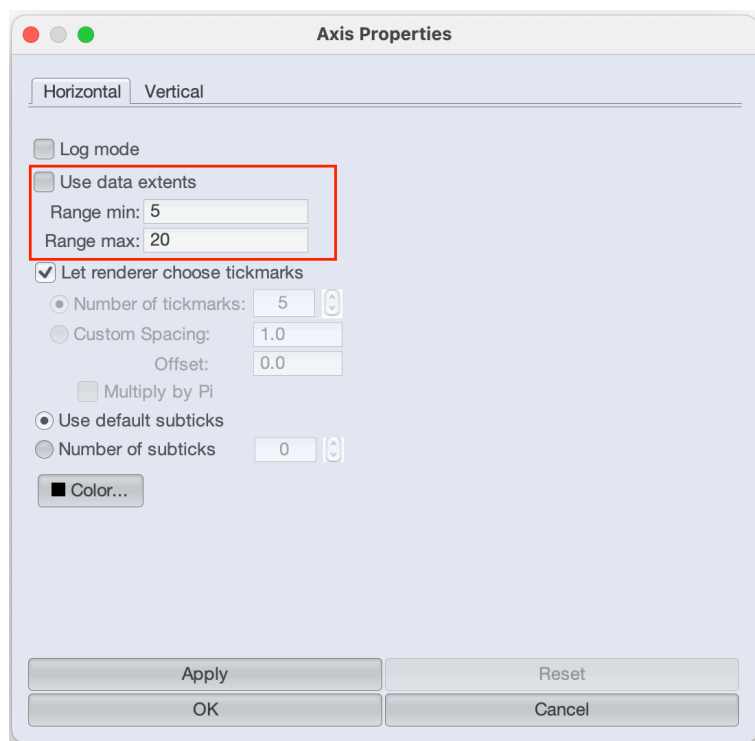


For at se, at grafen faktisk går gennem punktet (12, 34), skal akserne ændres. Det kan ske enten ved at bruge kontekstmenuen eller ved at højreklikke i plottet og bruge den menu, der kommer frem. Begge dele fungerer på stort set samme måde. Her vil vi benytte kontekstmenuen:

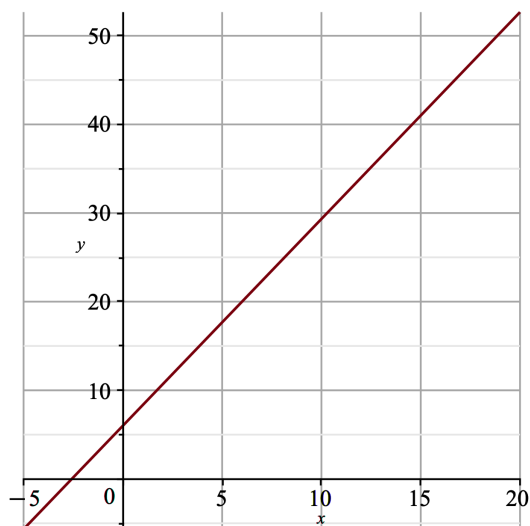
For at ændre x -aksen, klikkes først på plottet, så den relevante kontekstmenu kommer frem. Vælg her **Axes > Properties**:



Fjern først fluebenet i Use data extents og indstil intervallet som vist:



Tryk på OK, når du er færdig. Herefter vil plottet se sådan ud (med gridlines):



11.4 Skæring mellem to linjer

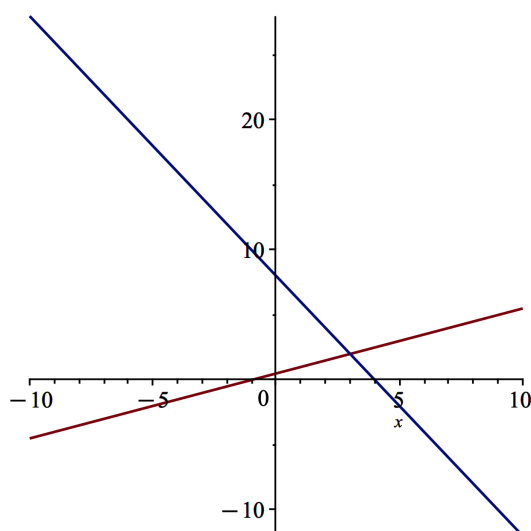
Vi skal her finde skæringspunktet mellem de to rette linjer givet ved:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ og } y = -2x + 8$$

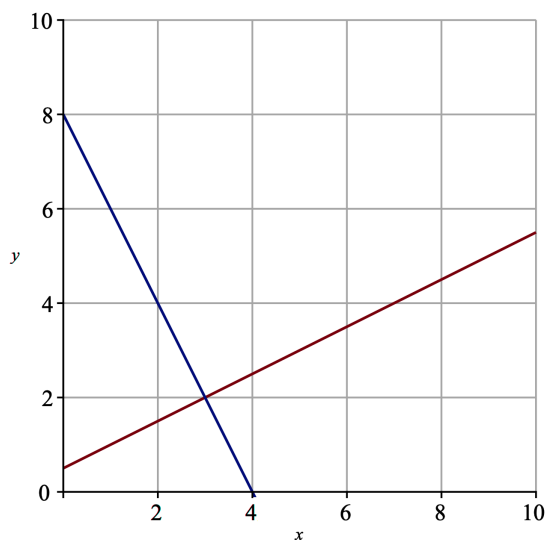
De to rette linjer vil skære hinanden, idet de har forskellig hældningskoefficient, hhv. $\frac{1}{2}$ og -2 .

Vi starter med at lave et hurtigt plot af de to linjer:

Indsæt et tomt 2-D plot og træk de to ligninger til plottet



Sæt gridlines på plottet, så du kan aflæse skæringspunktet. Det kan være lidt svært at aflæse, så indstil akserne, så både x - og y -aksen er intervallet $[0, 10]$. (Du indstiller y -aksen på samme måde, som du indstiller x -aksen. I Axes Properties vinduet klikker du på fanen **Vertical** for at komme til y -akse indstillingen)

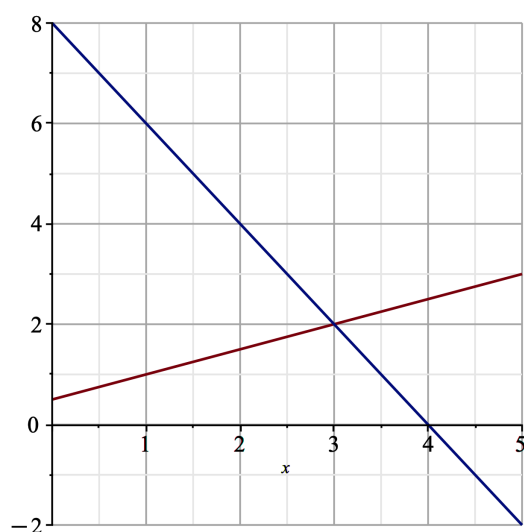


Nu er skæringspunktet nemt at aflæse til $(3, 2)$.

Du kan naturligvis også bruge plot-kommandoen til at tegne graferne – og her er det faktisk nemmere at indstille akserne.

Intervallerne $x = 0 \dots 5$ finder man ved at prøve sig lidt frem indtil det ser fornuftigt ud.

$$\text{plot}\left(\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, -2x + 8\right], x = 0 \dots 5, \text{gridlines}\right)$$



Skæringspunktet kan aflæses til $(3, 2)$.

Beregning af skæringspunktet

Vi kan naturligvis også beregne skæringspunktet. Det er vigtigt at kunne dette, da en nøjagtig aflæsning ofte ikke er mulig (fx hvis skæringspunktets koordinater er ikke-pæne brøker):

Indsæt de to ligninger omgivet af $\{ \}$ i en solve-kommando:

$$\text{solve}\left(\left\{y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, y = -2x + 8\right\}\right)$$

$$\{x = 3, y = 2\}$$

(11.14)

Alternativt:

Skriv de to ligninger i math-mode adskilt med et komma og brug **Solve>Solve** fra kontekstmenuen:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, y = -2x + 8 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 3, y = 2\}$$

11.5 Ortogonale linjer

Lad to rette linjer være givet ved ligningerne

$$y = a \cdot x + b \text{ og } y = c \cdot x + d$$

Så gælder der, at de to linjer er ortogonale, hvis $a \cdot c = -1$.

Det omvendte gælder også, altså hvis $a \cdot c = -1$, så er de to linjer ortogonale.

Fx er de to linjer

$$y = 3x + 5 \text{ og } y = -\frac{1}{3}x - 7$$

ortogonale, idet produktet af de to linjers hældninger er $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

En typisk opgave kunne fx være, at vi har givet ligningen for en ret linje:

$$l: y = \frac{2}{3}x + 4$$

og et punkt $P = [-6, 4]$

Så skal vi finde ligningen den rette linje m , der er ortogonal til l og går gennem punktet P .

Vi starter med at bestemme hældningen for m , der har formen

$$y = c \cdot x + d$$

Da l og m skal være ortogonale, gælder der, at $\frac{2}{3} \cdot c = -1$, hvor c er hældningen for m . Denne ligning kan vi løse:

$$\frac{2}{3} \cdot c = -1 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ c = -\frac{3}{2} \right\}$$

Herefter kan vi bestemme konstanleddet d ved at indsætte punktet P i ligningen $y = -\frac{3}{2} \cdot x + d$

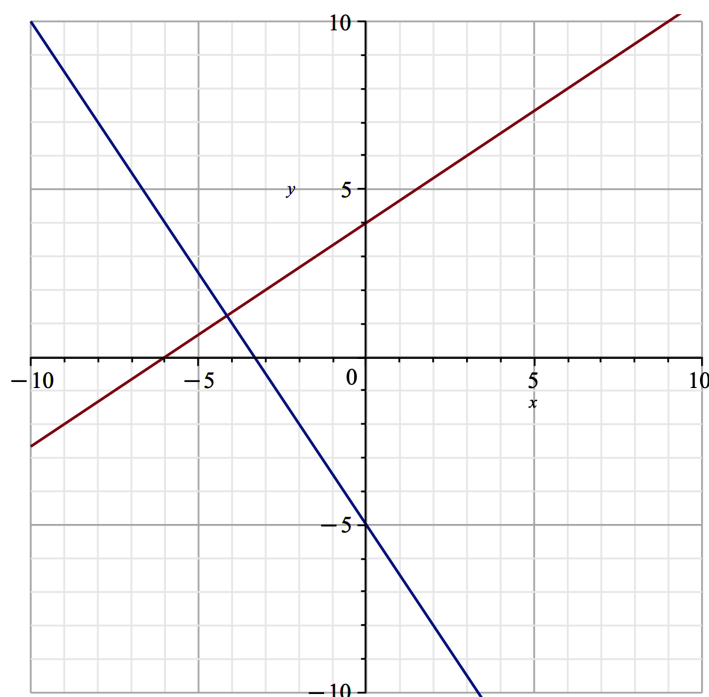
$$4 = -\frac{3}{2} \cdot (-6) + d \xrightarrow{\text{solve}} \{d = -5\}$$

Dvs., at ligningen for m bliver

$$y = -\frac{3}{2}x - 5$$

For at kontrollere laver vi et plot:

$$\text{plot}\left(\left[\frac{2}{3}x + 4, -\frac{3}{2}x - 5\right], x = -10 \dots 10, y = -10 \dots 10, \text{gridlines}, \text{scaling} = \text{constrained}\right)$$



Tilføjjelsen *scaling = constrained* er vigtig, så vi er sikre på, at enheden på de to akser er den samme – ellers kan man ikke visuelt afgøre, om vinklen mellem de to linjer er ret.

11.6 Vinkler mellem to rette linjer

Vi ved, at der helt generelt gælder, at den vinkel v en ret linje med ligningen $y = a \cdot x + b$ danner med x -aksen kan bestemmes ved

$$\tan(v) = a$$

der som løsning har

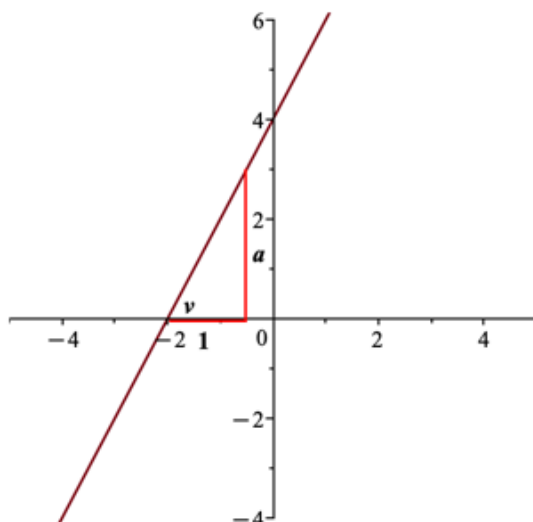
$$v = \text{invTan}(a)$$

– og for at have *invTan* til rådighed, skal vi indlæse Gym-pakken:

with(Gym) :

På figuren nedenfor er tegnet grafen for

$$y = a \cdot x + b$$



Det, at linjen har hældningen a betyder, at hvis vi giver x tilvæksten 1, så får y tilvæksten a . Dette giver os en retvinklet trekant med katederne 1 og a . I denne trekant gælder, at $\tan(v) = \frac{a}{1} \Rightarrow \tan(v) = a$

Ved hjælp af denne formel kan vi bestemme den vinkel linjen med ligningen $y = 2x + 4$ danner med x -aksen:

$$v = \text{invTan}(2)$$

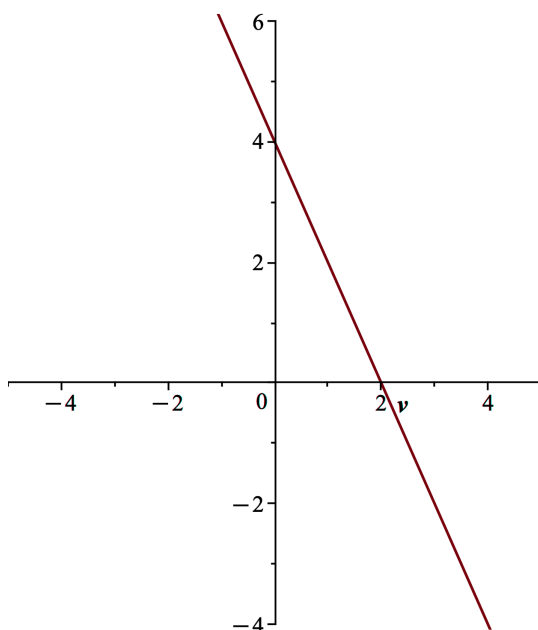
$$v = 63.43494883 \quad (11.15)$$

Hvad nu, hvis linjens hældning er negativ? Vi kan fx se på linjen med ligningen $y = -2x + 4$, og udregne den vinkel, linjen danner med x -aksen:

$$v = \text{invTan}(-2)$$

$$v = -63.43494883 \quad (11.16)$$

Den vinkel, vi finder, er markeret med v på nedenstående figur:



Det negative fortegn skal tolkes ved, at vinklen måles fra x -aksen til linjen i negativ omløbsretning.

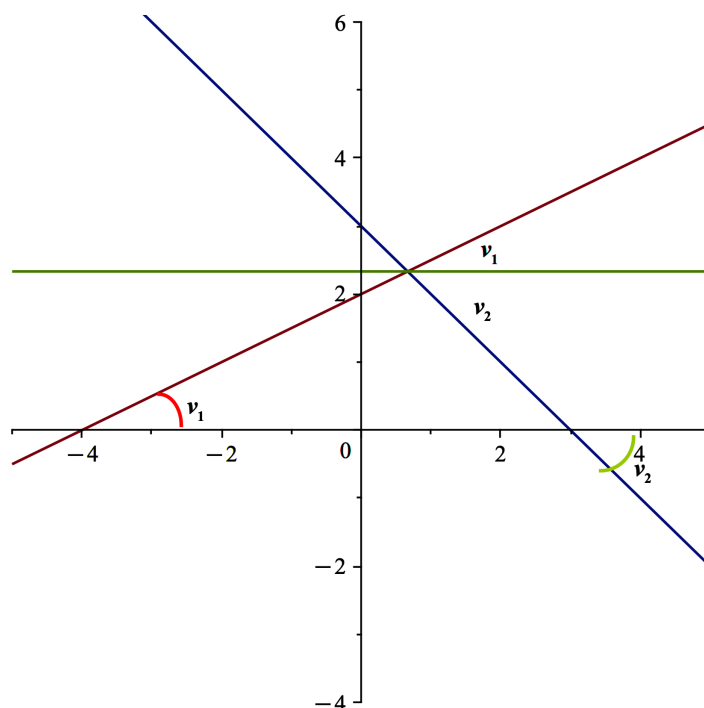
Vinkler mellem to rette linjer

Lad to linjer være givet ved

$$l: y = a_1 \cdot x + b_1$$

$$m: y = a_2 \cdot x + b_2$$

hvor $a_1 > 0$ og $a_2 < 0$.



Af figuren ses, at vinklen v mellem de to linjer er $v_1 + v_2$. Vi kan bestemme v_1 ved

$$v_1 = \text{invTan}(a_1)$$

Tilsvarende kan vi bestemme v_2 , men her skal vi være forsigtige, idet den vinkel, vi får ud af $\text{invTan}(a_2)$ er negativ (fordi $a_2 < 0$).

Vi 'fjerner' dette minus ved at gange med -1 , så

$$v_2 = -\text{invTan}(a_2)$$

Så alt i alt finder vi, at vinkel v mellem l og m er bestemt ved

$$v = v_1 + v_2 = \text{invTan}(a_1) - \text{invTan}(a_2)$$

Den anden vinkel mellem l og m er bestemt ved $180 - v$.

Noget helt tilsvarende kan vises, hvis begge hældninger er enten positive eller negative.

Selvom ovenstående figur kunne tyde på det, så kan vi altså ikke være sikre på, at det er den spidse vinkel mellem de to linjer, vi får beregnet.

Lad os se på et simpelt eksempel, hvor de to ligninger er

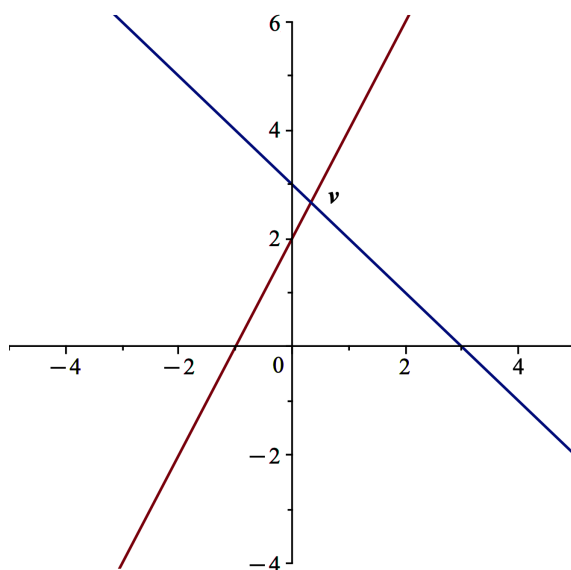
$$y = 2x + 2$$

$$y = 2x + 2 \quad (11.17)$$

og

$$y = -x + 3$$

$$y = -x + 3 \quad (11.18)$$



$$v = \text{invTan}(2) - \text{invTan}(-1)$$

$$v = 108.4349488 \quad (11.19)$$

$$180 - 108.43 = 71.57$$

En sidste lille detalje: Da vinklen udregnes som en differens, betyder rækkefølgen af de to led et fortegn. Havde vi byttet om i udregningen ovenfor, så var resultatet blevet -108.43 . For at slippe for at skulle spekulere på den slags, sætter vi numerisk-tegn om differensen:

$$v = |\text{invTan}(a_1) - \text{invTan}(a_2)|$$

Hermed har vi en formel, der altid vil give dig én af vinklerne mellem to rette linjer.

(Du finder numerisktegnet i Common Symbols paletten – eller du kan indtaste med tastaturet. På en pc sidder tegnet | på tastaturet. På en mac skal man taste option+i)

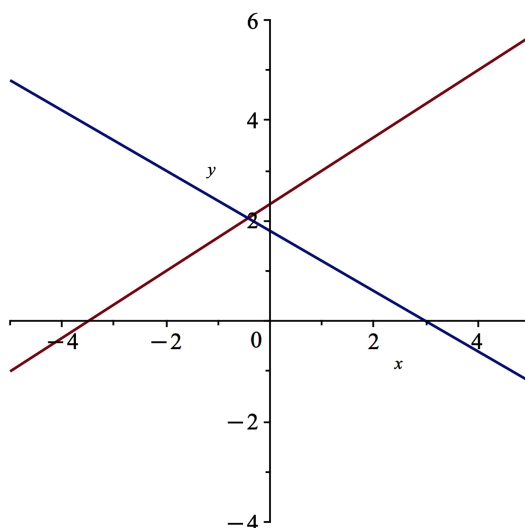
11.6.1 Eksempel

Vi skal bestemme den spidse vinkel mellem de to linjer givet ved ligningerne:

$$\ell_1 : y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$\ell_2 : y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$\text{plot}\left(\left[\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}, -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}\right], x = -5 \dots 5, y = -4 \dots 6\right)$$



with(Gym) :

$$v = \left| \text{invTan}\left(\frac{2}{3}\right) - \text{invTan}\left(-\frac{3}{5}\right) \right|$$

$$v = 64.65382405$$

(11.20)

Dvs., at den spidse vinkel mellem de to linjer er 64.65° .

11.7 Længder og afstande

11.7.1 Afstandsformlen

Til at bestemme afstanden mellem to punkter $A = [x_1, y_1]$ og $B = [x_2, y_2]$ benyttes afstandsformlen

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Hvis $A = [-2, 1]$ og $B = [2, 3]$, så er afstanden mellem A og B :

$$|AB| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - 1)^2}$$

$$|AB| = 2\sqrt{5} \quad (11.21)$$

Med Gym-pakken

Med kommandoen *afstand* fra Gym-pakken kan du finde afstanden mellem de to punkter sådan her:

with(Gym) :

$$\text{afstand}([-2, 1], [2, 3]) = 2\sqrt{5}$$

11.7.2 Afstand fra en linje til et punkt

Afstanden fra en linje med ligningen

$$l: y = a \cdot x + b$$

til et punkt $P = [x_1, x_2]$

kan beregnes ved hjælp af formlen:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

En typisk opgave kunne fx være, at vi har givet ligningen for en ret linje:

$$l: y = \frac{2}{3}x + 4$$

og et punkt $P = [-6, 4]$.

Vi skal finde afstanden fra punktet P til den rette linje l :

Vi sætter ind i formlen

$$\text{dist}(P, l) = \frac{\left| \frac{2}{3} \cdot (-6) + 4 - 4 \right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}}$$

$$\text{dist}(P, l) = \frac{12\sqrt{13}}{13} \quad (11.22)$$

at 5 digits $\rightarrow$

$$\text{dist}(P, l) = 3.3283 \quad (11.23)$$

Med Gym-pakken

Med kommandoen *afstand* fra Gym-pakken kan du finde afstanden mellem punktet og linjen sådan her:

with(Gym) :

$$\text{afstand}\left(\left[-6, 4\right], y = \frac{2}{3}x + 4\right) = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

Du kan naturligvis også definere punktet og ligningen først:

$$P := [-6, 4] \quad P := [-6, 4] \quad l := y = \frac{2}{3}x + 4 \quad l := y = \frac{2}{3}x + 4 \quad \text{afstand}(P, l) = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

11.7.3 Eksempel 1

Ved hjælp af de to afstandsformler kan vi løse opgaver i trekantsgeometri. Vi ser igen på trekanten vi tegnede tidligere:

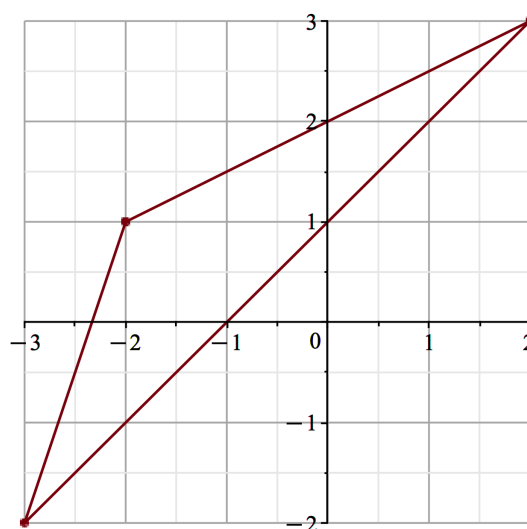
$$A := [-2, 1] = [-2, 1]$$

$$B := [2, 3] = [2, 3]$$

$$C := [-3, -2] = [-3, -2]$$

with(Gym) :

punktPlot([A, B, C, A], forbind, size = [300, 300])



$$\text{afstand}(A, B) = 2\sqrt{5}$$

$$\text{afstand}(B, C) = 5\sqrt{2}$$

$$\text{afstand}(A, C) = \sqrt{10}$$

Med formelen for afstand fra et punkt til en linje kan du fx også finde længden højden fra vinkel A på siden BC .

Hertil skal vi først have fundet en ligning for linjen gennem B og C :

linje(B, C)

$$y = x + 1$$

(11.26)

Herefter finder vi afstanden fra A denne linje:

$$\text{afstand}(A, y = x + 1) = \sqrt{2}$$

Og helt tilsvarende kan du finde de to andre højders længde.

Arealet af trekanten kan nu findes som

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\text{Areal} = 5 \quad (11.27)$$

11.7.4 Eksempel 2

De to linjer:

$$y = 2x - 3$$

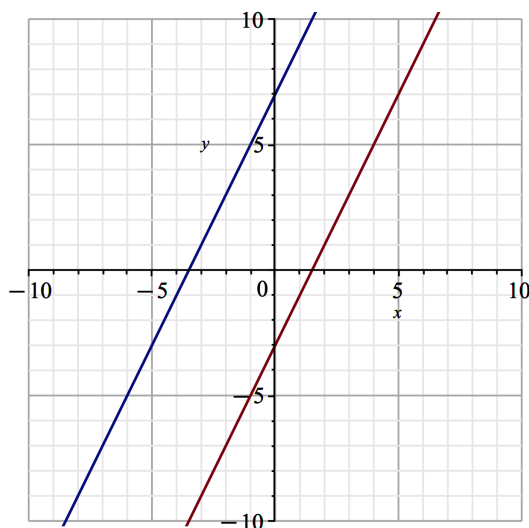
$$y = 2x - 3 \quad (11.28)$$

$$y = 2x + 7$$

$$y = 2x + 7 \quad (11.29)$$

er parallelle, idet de har samme hældningskoefficient.

`plot([2x - 3, 2x + 7], x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, gridlines)`



Men hvad er afstanden mellem de to linjer. Med *afstanden* mener vi den vinkelrette afstand – ikke den lodrette afstand, der jo umiddelbart ses at være 10.

Til at bestemme afstanden mellem de to linjer kan vi benytte formlen for afstanden mellem et punkt og en linje. Vi vælger et punkt på den blå linje – og det, der er nemmest at finde, er skæringen med y -aksen: $(0, 7)$.

Vi finder så afstanden fra punktet $(0, 7)$ til den røde linje (og husker, at i Maple skal punkters koordinater skrives med kantede parenteser):

$$\text{afstand}([0, 7], y = 2x - 3) = 2\sqrt{5}$$

Faktisk kan kommandoen *afstand* finde denne afstand direkte uden at skulle bestemme et punkt på den ene linje:

$$\text{afstand}(y = 2x - 3, y = 2x + 7) = 2\sqrt{5}$$

11.8 Cirklen

Cirkelns ligning på standardform er

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

hvor (a, b) er cirkelns centrum og r er cirkelns radius.

Hvis en cirkel er givet på ekspanderet form, hvor de to kvadrater er regnet ud, kan det være lidt svært at komme tilbage til standardformen. Her kan Maple være til stor hjælp.

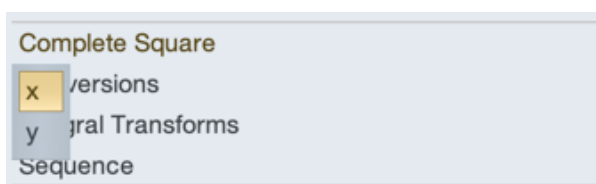
Lad os antage, at vi har en cirkel givet ved

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$$

Complete Square (kvadratkomplettering)

Inden du starter, skal du med denne metode altid sørge for, at du har 0 på højresiden.

Placer markøren efter cirkelligningen og vælg **Complete Square > x** i kontekstmenuen. Vælg herefter **Complete Square > y**.



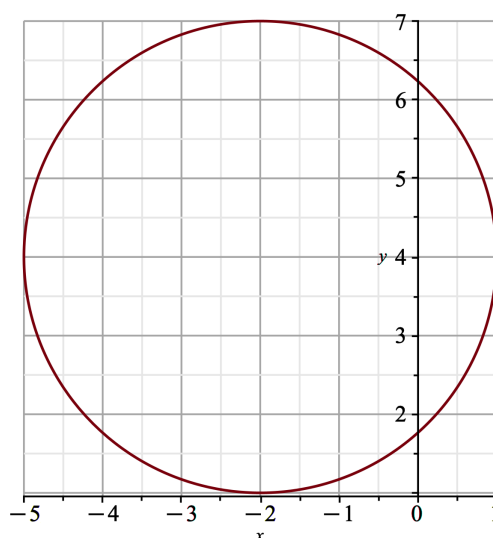
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0 \xrightarrow{\text{complete square}} y^2 - 8y + (x + 2)^2 + 7 = 0 \xrightarrow{\text{complete square}} (x + 2)^2 + (y - 4)^2 - 9 = 0$$

Herefter mangler du blot at flytte konstanten over på højre side af ligningen:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Her kan du nemt aflæse, at cirklen har centrum i $(-2, 4)$ og at radius er 3.

Du kan hurtigt få tegnet cirklen i et koordinatsystem ved at indsætte et tomt koordinatsystem og derefter trække cirkelns ligning til koordinatsystemet – og sætter du et gridnet på, så kan du faktisk aflæse centrum og radius :



Det er ligegyldigt, om du trækker den oprindelige ligning eller den omskrevne ligning ind i plottet.

Men du skal passe på når du bruger Complete Square, idet rækkefølgen af leddene er langt fra altid den forventede. Lad os prøve med et andet eksempel:

$$x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (x + 3)^2 + y^2 - 12y + 11 = 0 \stackrel{\text{complete square}}{=} (y - 6)^2 + (x + 3)^2 - 25 = 0$$

Læg mærke til, at her er de to led $(x + 3)^2$ og $(y - 6)^2$ byttet om i forhold til standardformen, og det kan give anledning til fejl, når centrumets koordinater skal aflæses af den omskrevne ligning.

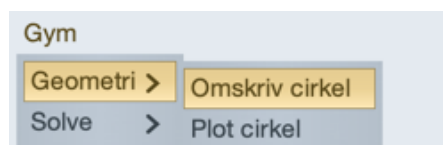
Med Gym-pakken

For at undgå den fejl, der kan opstå ved aflæsning af koordinaterne, er Gym-pakken udstyret med en kommando *omskrivCirkel*, der vil give leddene i den forventede rækkefølge. Desuden behøver du ikke her, at sørge for, at der står 0 på højre side af ligningen.

with(Gym) :

$$\text{omskrivCirkel}(x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0) \\ (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad (11.30)$$

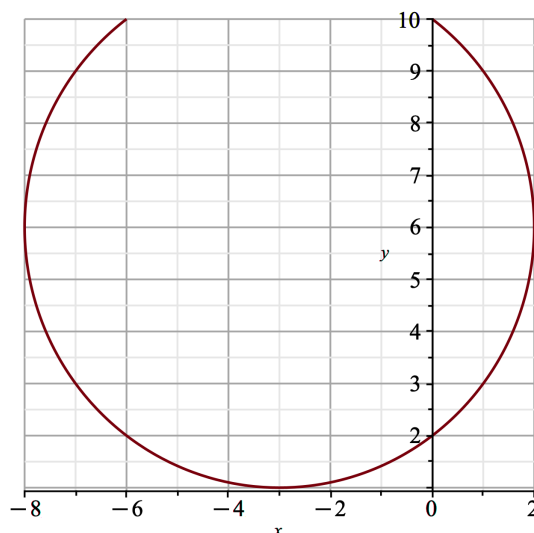
$$x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0 \xrightarrow{\text{omskrivCirkel}} (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$$



11.9 Plot af en cirkel

Vi så ovenfor, at det gik som en leg at plotte en cirkel ved at trække den ind i et tomt koordinatsystem indsat med **2-D Plot** (som findes i **Insert** fanen). Så nemt går det ikke altid. Hvis vi prøver med den anden cirkel, vi så på, så sker dette:

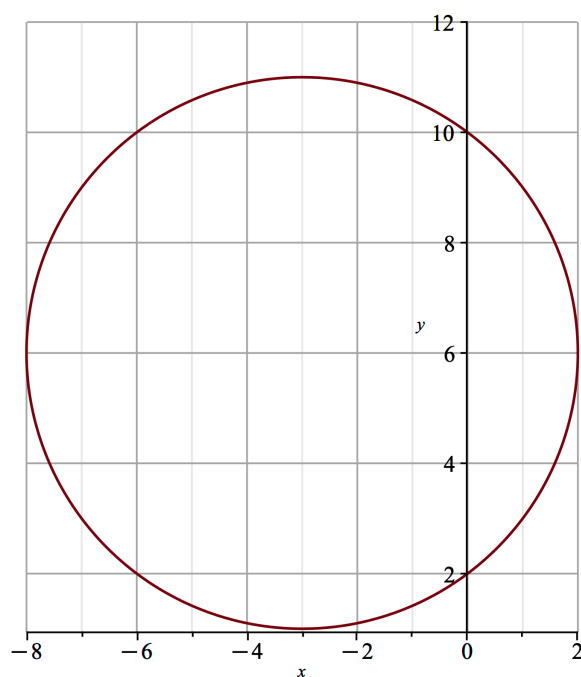
$$x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 = 0 \quad (11.31)$$



Her er vi nødt til at indstille y-aksen så den går til fx 12. Gør vi det, får vi tegnet et æggeformet plot, som vi nemt kan rette op på ved at sætte et flueben i feltet **Scaling Constrained** i kontekstmenuen (klik i grafen for at se kontekstmenuen):

☒ Scaling Constrained

Herefter vil det se sådan ud:



Hvis vi prøver at plotte cirklen med ligningen

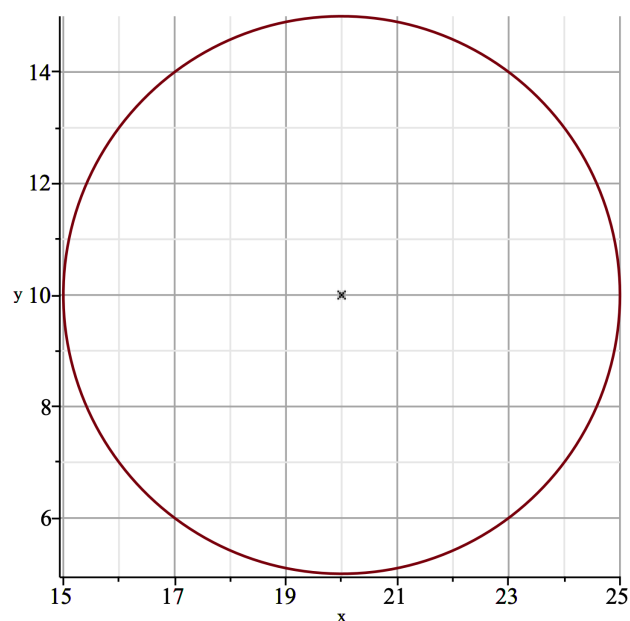
$$x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0$$

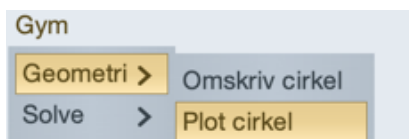
$$x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0 \quad (11.32)$$

vil intet se, idet hele cirklen falder uden for det standardvindue (fra -10 til 10 på begge akser), vi får indsat.

I dette tilfælde kan du benytte kommandoen *plotCirkel* fra Gym-pakken til at få et hurtigt plot af cirklen:

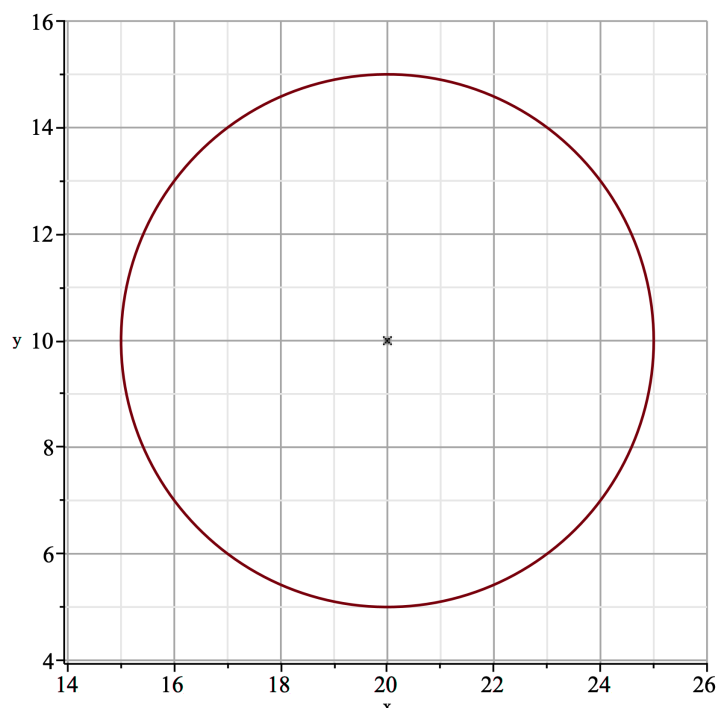
$$x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0 \xrightarrow{\text{plotCirkel}}$$





Hvis vi i stedet skriver kommandoen, vil vi få mulighed for at skabe lidt luft omkring cirklen:

`plotCirkel( $x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0$ , view = [14 ..26, 4 ..16])`



– og vi får endda markeret centrum med et lille kryds.

11.9.1 implicit plot (avanceret)

Det er ingen simpel sag at plote en cirkel. Den almindelige plot-kommando kan ikke bruges her, idet den er beregnet til at plote funktioner – og en cirkel kan som bekendt ikke være graf for nogen funktion.

Vi skal bruge noget, der hedder *implicit plot*, hvor vi skal angive det vindue der skal plottes i – og for at kunne gøre dette, er vi nødt til at kende centrum og radius i cirklen.

Vi genbruger ovenstående eksempel, hvor vi omskriver til standardform:

$$x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0 \xrightarrow{\text{omskrivCirkel}} (x - 20)^2 + (y - 10)^2 = 25$$

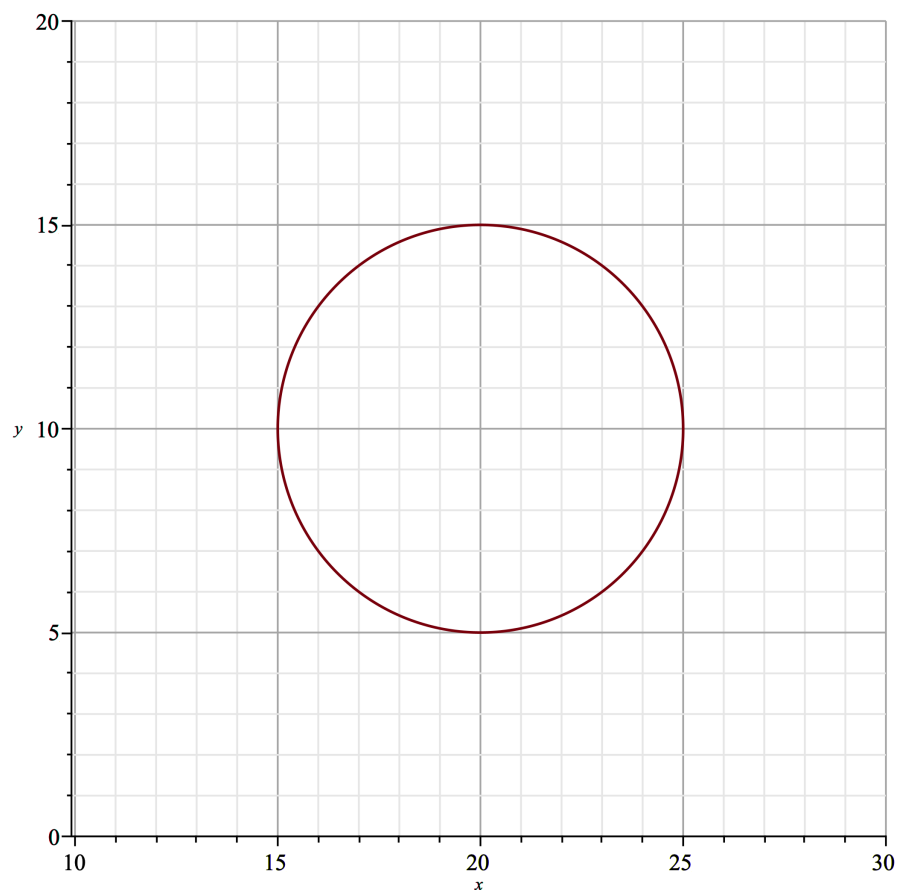
så centrum er $(20, 10)$ og radius er 5. Dvs., at det mindste vindue, vi kan bruge er $[15 ..25, 5 ..15]$. Vi giver lidt luft, og vælger vinduet

`[10 ..30, 0 ..20]`

Selve kommandoen *implicitplot* ligger i en speciel pakke, der hedder *plots*, så denne skal vi læse ind først:

with(plots) :

implicitplot($x^2 + y^2 - 40x - 20y + 475 = 0$, $x = 15 \dots 25$, $y = 5 \dots 15$, *view* = [10 ..30, 0 ..20])



11.10 Skæring mellem en cirkel og en ret linje

En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

og en ret linje er givet ved

$$y = -x + 6$$

Først vil vi undersøge, om linjen og cirklen skærer hinanden:

Det gør vi ved at bestemme afstanden fra cirkelns centrum til linjen.

Hvis denne afstand er

- mindre radius i cirklen, er der to skæringspunkter
- lig med radius, er der ét skæringspunkt
- større end radius, er der ingen skæringspunkter

Vi bestemmer cirkelns centrum og radius:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \xrightarrow{\text{omskriv Cirkel}} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

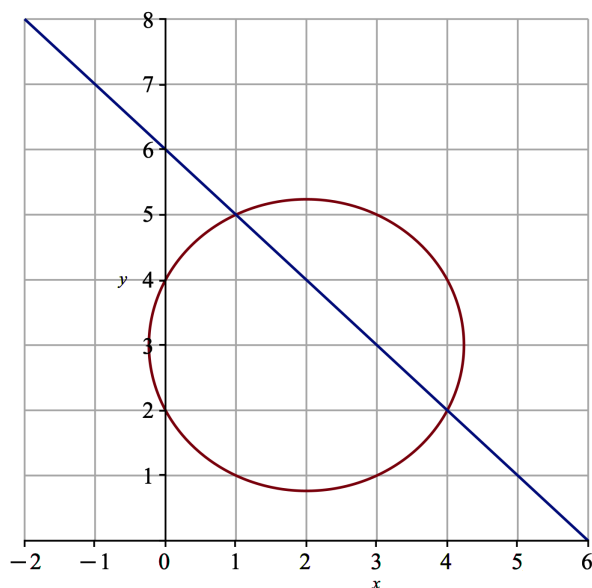
Heraf kan vi se, cirklen har centrum i $(2, 3)$ og radius $r = \sqrt{5}$.

Vi kan nu bestemme afstanden fra centrum til den givne linje

$$\text{afstand}([2, 3], y = -x + 6) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Da denne afstand er mindre end radius, er der to skæringspunkter.

Vi laver et hurtigt plot af cirklen og linjen (hvor akserne er rettet til):



Her kan vi se, at skæringen sker i punkterne $(4, 2)$ og $(1, 5)$.

Vi kan naturligvis også regne os frem til disse skæringspunkter ved at løse to ligninger med to ubekendte

$$\text{solve}(\{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0, y = -x + 6\})$$

$$\{x = 4, y = 2\}, \{x = 1, y = 5\}$$

(11.33)

11.10.1 Alternativ metode

Vi omskriver først cirkelns ligning til standardform:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \xrightarrow{\text{omskrivCirkel}} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

Herefter indsætter vi udtrykket for y , $y = -x + 6$, i cirkelns ligning og benytter Simplify > Simplify til at regne kvadraterne ud :

$$(x - 2)^2 + (-x + 6 - 3)^2 - 5 = 0 \xrightarrow{\text{simplify}} 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

Der er nu kommet en andengradsligning frem. Denne finder vi diskriminanten for:

$$d = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8$$

$$d = 36 \quad (11.34)$$

Da diskriminanten er positiv, vil linjen skære cirklen i to punkter.

Vi løser andengradsligningen:

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \{x = 4\}, \{x = 1\}$$

Hermed har vi x -koordinaterne til skæringspunkterne. De tilhørende y -koordinater finder vi nemmest ved at sætte ind i linjens ligning:

$$y = -4 + 6 = 2$$

og

$$y = -1 + 6 = 5$$

Cirklen og linjen skærer altså hinanden i punkterne $(4, 2)$ og $(1, 5)$.

11.10.2 Eksempel 1

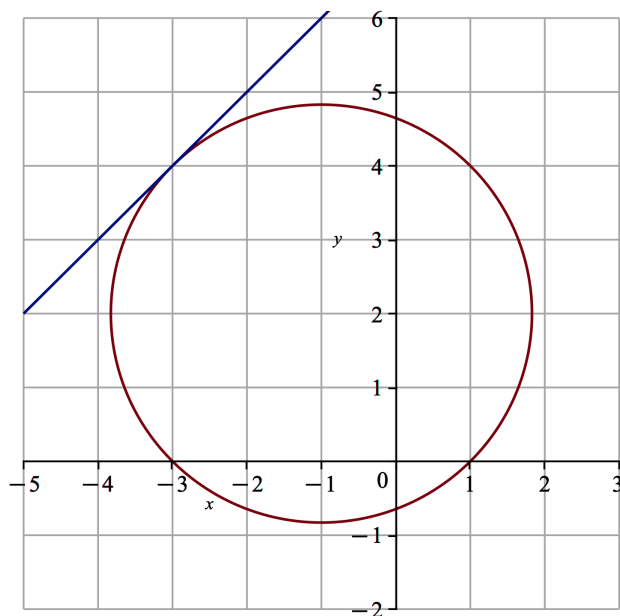
Vi skal her undersøge, om linjen med ligningen

$$y = x + 7$$

er tangent til cirklen med ligningen

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

Som det første kan vi jo lave et hurtigt plot ved at indsætte et 2-D Plot og trække ligningerne til dette:



Efter indstilling af akserne ser det i al fald ud til, at linjen er tangent til cirklen. Men plots kan snyde, så lad os regne efter.

Da cirkelns ligning er på standardform, kan vi umiddelbart aflæse centrum til $(-1, 2)$ og radius til $r = \sqrt{8}$. Vi finder derefter afstanden fra centrum til linjen:

with(Gym) :

$$\text{afstand}([-1, 2], y = x + 7) = 2\sqrt{2}$$

Da $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, ser vi, at afstanden fra linjen til centrum af cirklen er lig med radius i cirklen. Altså er linjen en tangent til cirklen.

Alternativt kan vi bestemme eventuelle skæringspunkter ved at løse:

$$\text{solve}(\{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8, y = x + 7\})$$

$$\{x = -3, y = 4\}$$

(11.35)

Altså netop ét skæringspunkt, så linjen tangerer cirklen i punktet $(-3, 4)$.

11.10.3 Eksempel 2

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 \quad (11.36)$$

Punktet $P = [-4, 6]$ ligger på cirkelperiferien. Vi skal finde en ligning for tangenten til cirklen i punktet P .

Vi kan umiddelbart aflæse centrum's koordinater til $C = [-2, 3]$. Linjen gennem C og P er ortogonal til tangenten til cirklen i punktet P , så vi finder ligningen for denne linje:

with(Gym) :

linje([-2, 3], [-4, 6])

$$y = -\frac{3x}{2} \quad (11.37)$$

Da tangenten skal være ortogonal til denne linje, vil tangentens hældning c opfylde:

$$c \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{c = \frac{2}{3}\right\}$$

Ligningen for tangenten er derfor

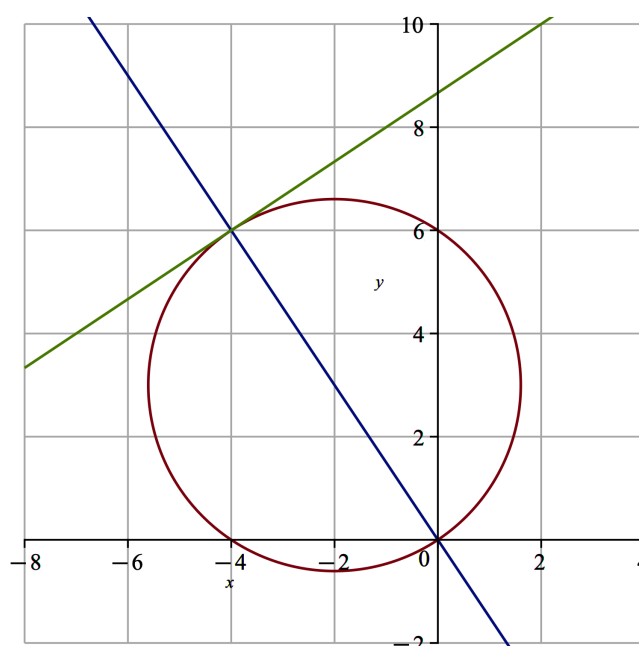
$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Vi bestemmer b ved at indsætte punktet P i denne ligning:

$$6 = \frac{2}{3} \cdot (-4) + b \xrightarrow{\text{solve}} \left\{b = \frac{26}{3}\right\}$$

Dvs., at ligning for tangenten er $y = \frac{2}{3}x + \frac{26}{3}$.

Lad os tjekke med et plot



12 Deskriptiv statistik: Ikke grupperede observationer

12.1 Rå data

Gym-pakken indeholder nogle rutiner til behandling af ikke-grupperede og grupperede observationssæt, og skal være indlæst for at dette dokument vil fungere.

with(Gym) :

Du kan indtaste de rå data i en liste, en vektor, en matrix eller indlæse data fra en ekstern fil (fx i Excel format). Her er data i en liste (listen behøver ikke at være sorteret):

obs := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13] :

Hyppigheder og frekvenser findes

$$H := \text{hyppighed}(obs) = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F := \text{frekvens}(H) = \begin{bmatrix} 8 & 0.10000 \\ 9 & 0.15000 \\ 10 & 0.25000 \\ 11 & 0.25000 \\ 12 & 0.10000 \\ 13 & 0.15000 \end{bmatrix}$$

De kumulerede frekvenser findes

$$\text{kumuleretFrekvens}(F) = \begin{bmatrix} 8 & 0.10000 \\ 9 & 0.25000 \\ 10 & 0.50000 \\ 11 & 0.75000 \\ 12 & 0.85000 \\ 13 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

Du kan klare det hele i én arbejdsgang ved at få udskrevet en frekvenstabel – du kan dog ikke benytte tabellen i senere beregninger, da det kun er tekst der udskrives

`frekvensTabel (obs, decimaler = 1)`

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
8	2	10.0	10.0
9	3	15.0	25.0
10	5	25.0	50.0
11	5	25.0	75.0
12	2	10.0	85.0
13	3	15.0	100.0

Hvis du hellere vil have en rigtig tabel, så tilføj `output = tabel` i kommandoen

`frekvensTabel (obs, decimaler = 1, output = tabel) :`

Observation	Hyppighed	Frekvens (%)	Kumuleret (%)
8	2	10.0	10.0
9	3	15.0	25.0
10	5	25.0	50.0
11	5	25.0	75.0
12	2	10.0	85.0
13	3	15.0	100.0

Herefter kan du fortsætte din undersøgelse med at tegne pindediagram, trappekurve mm. som beskrevet nedenfor.

12.2 Optalte data

Hvis du har data givet i en eller anden optalt form, indtaster du observationssættet i en matrix med observationerne i 1. søjle og hyppighederne (eller frekvenserne) i 2. søjle.

Du indtaster nedenstående matrix ved først at skrive (i math-mode) $H :=$ Med markøren stående efter lighedstegnet går du til **Matrix**-paletten og indstiller **Rows** (rækker) og **Columns** (søjler) som vist:

Afslut med et tryk på **Insert Matrix** - knappen. Det vil da se sådan ud

$$H := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \\ m_{4,1} & m_{4,2} \\ m_{5,1} & m_{5,2} \\ m_{6,1} & m_{6,2} \end{bmatrix}$$

Matricen er nu klar til indtastning. Du skal ikke slette det, der står i matricen men 'skrive oveni': Skriv 8 efterfulgt af et tryk på TAB-tasten. Så hopper du til det andet element i rækken, der bliver markeret med gult. Skriv 2 og hop til den næste række med et tryk på TAB. Osv.

Hår du er færdig, ser det sådan ud:

$$H := \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix} :$$

Her har du hyppighederne givet. Vil du finde frekvenserne og de kumulerede frekvenser, sker der sådan:

$$F := \text{frekvens}(H) = \begin{bmatrix} 8 & 0.10000 \\ 9 & 0.15000 \\ 10 & 0.25000 \\ 11 & 0.25000 \\ 12 & 0.10000 \\ 13 & 0.15000 \end{bmatrix}$$

$$\text{kumuleretFrekvens}(F) = \begin{bmatrix} 8 & 0.10000 \\ 9 & 0.25000 \\ 10 & 0.50000 \\ 11 & 0.75000 \\ 12 & 0.85000 \\ 13 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

Du kan klare det hele i én arbejdsgang ved at få udskrevet en frekvenstabel – du kan dog ikke benytte tabellen i senere beregninger, da det kun er tekst der udskrives

frekvensTabel(H)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
8	2	10.000	10.000
9	3	15.000	25.000
10	5	25.000	50.000
11	5	25.000	75.000
12	2	10.000	85.000
13	3	15.000	100.000

Hvis du kun har givet frekvenserne, kan du også lave en frekvenstabel

frekvensTabel(F)

observation	frekvens(%)	kumuleret(%)
8	10.000	10.000
9	15.000	25.000
10	25.000	50.000
11	25.000	75.000
12	10.000	85.000
13	15.000	100.000

– hvor du af gode grunde ikke får en søjle med hyppigheder.

Og som tabel ser det sådan ud (hvor der ingen hyppigheder er, fordi frekvenserne benyttes til at lave tabellen)

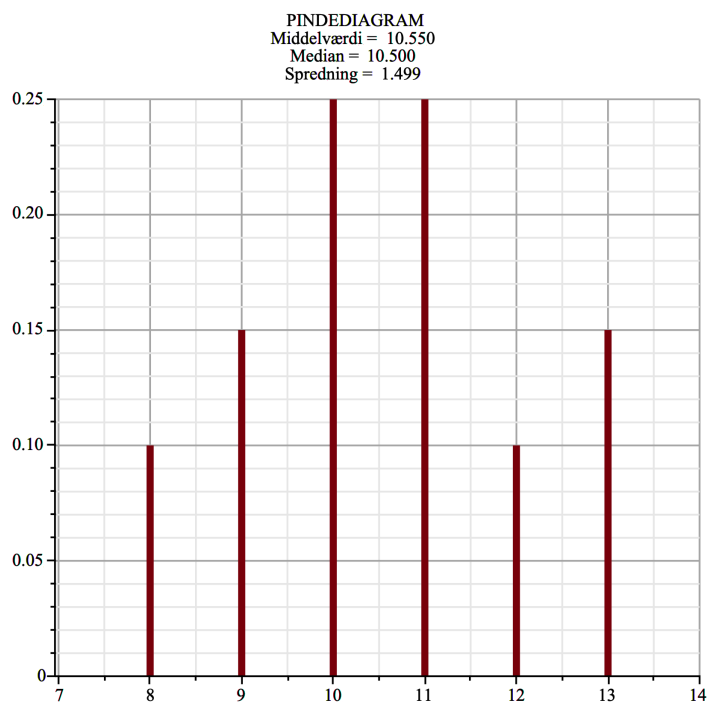
frekvensTabel (*F*, *output* = *tabel*) :

Observation	Frekvens (%)	Kumuleret (%)
8	10.000	10.000
9	15.000	25.000
10	25.000	50.000
11	25.000	75.000
12	10.000	85.000
13	15.000	100.000

12.3 Pindediagram, trappekurve og deskriptorer

Pindediagrammet tegnes på basis af hyppighederne i matricen *H* (du kan naturligvis også bruge de rå data, hvis du har dem):

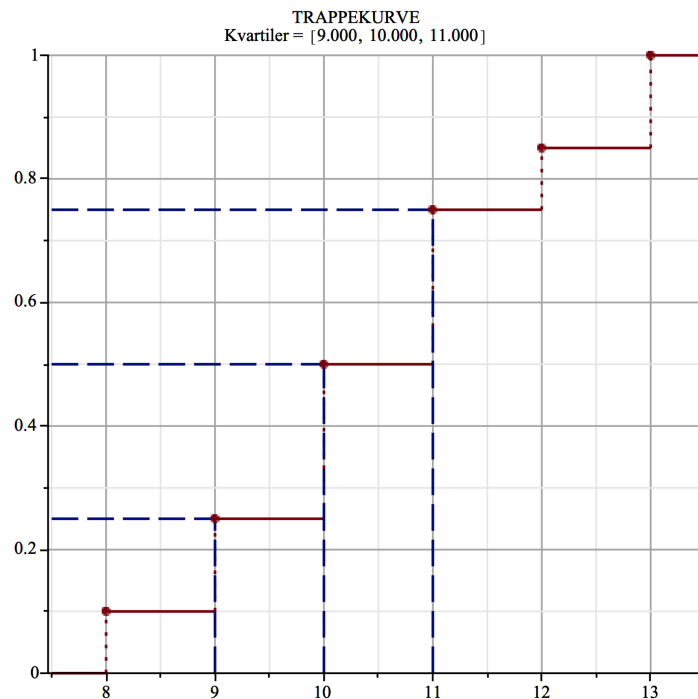
plotPindediagram (*H*, *size* = [400, 400])



Her får du desuden oplysning om observationssættets middelværdi, median og spredning.

Trappekurven plottes på basis af frekvenserne i matricen F (hvor du kan også bruge H som input):

`plotTrappekurve (F, size = [400, 400])`



Her får du oplysning om observationssættets kvartilsæt med de tre linjer til aflæsning af kvartilerne indtegnet. Hvis du vil slette en eller flere af disse, klikker du på linjen og trykker Backspace.

Med Gym-pakken kan du også direkte få fat i de fleste deskriptorer

`middel(H)` = 10.55000

`varians(H)` = 2.24750

`spredning(H)` = 1.49917

`typetal(H)` = [10, 11]

`kvartiler(H)` = [9.500, 10.500, 11.500]

Gym-pakken indeholder også kommandoen `fraktil`. Med denne kan du finde den mindste observation, hvis kumulerede frekvens er fx 60% eller derover ved

`fraktil(H, 0.6)` = 11

Endelig kan du få fat i forskriften for trappekurven med kommandoen, hvor parameteren x angiver navnet på den ønskede uafhængige variabel:

`trappekurve (H, x)`

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 8 \\ 0.100000000000000 & 8 \leq x < 9 \\ 0.250000000000000 & 9 \leq x < 10 \\ 0.500000000000000 & 10 \leq x < 11 \\ 0.750000000000000 & 11 \leq x < 12 \\ 0.850000000000000 & 12 \leq x < 13 \\ 1 & 13 \leq x \end{array} \right. \quad (12.1)$$

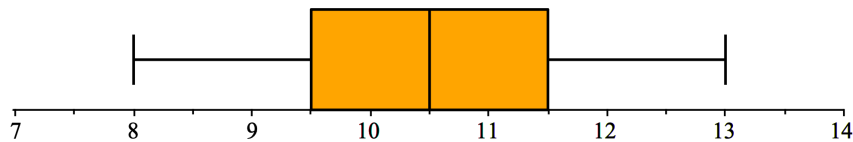
12.4 Boksplot af ikke-grupperede observationssæt

Anvender du kommandoen *boksplot* på de rå data, vil du få tegnet et boksplot, hvor kvartilerne ikke nødvendigvis er de samme som kvartilerne bestemt vha. trapekurven. På de rå data anvendes en metode (metode 2) baseret på opdeling af det sorterede observationssæt i 4 dele.

$obs := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 13]$:

boksplot (*obs*)

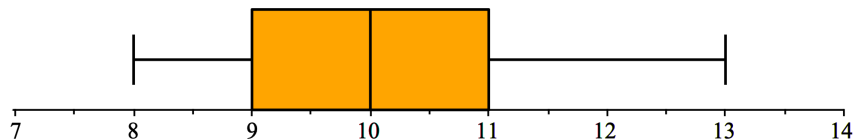
Kvartiler = [9.500, 10.50, 11.50]



Hvis du ønsker, at der skal foretages en bestemmelse af kvartilerne baseret på trapekurve metoden, skal du tilføje, at *metode* = 1 :

boksplot (*obs*, *metode* = 1)

Kvartiler = [9.000, 10.00, 11.00]



Er der foretaget optælling af observationerne i enten en hyppighedstabel eller en frekvenstabel, så vil metode 2 blive benyttet som standard

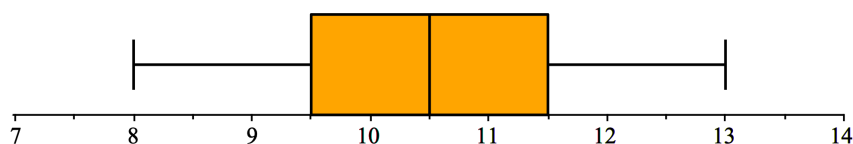
$H := \text{hyppighed} (obs)$

$$H := \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 10 & 5 \\ 11 & 5 \\ 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

(12.2)

boksplot (*H*)

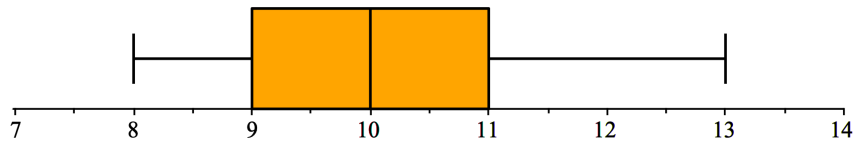
Kvartiler = [9.500, 10.50, 11.50]



Hvis du bruger en hyppighedstabel, men vil have boksplottet tegnet efter metode 1, så tilføjer du en parameter:

`boksplot(H, metode = 1)`

Kvartiler = [9.000, 10.00, 11.00]



12.5 Outliers

Du kan få markeret outliers ved at tilføje *outliers* i kommandoen:

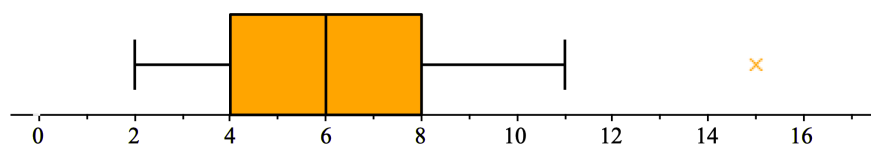
`obs2 := [2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 15]`

`obs2 := [2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 15]`

(12.3)

`boksplot(obs2, outliers)`

Kvartiler = [4.000, 6.000, 8.000]



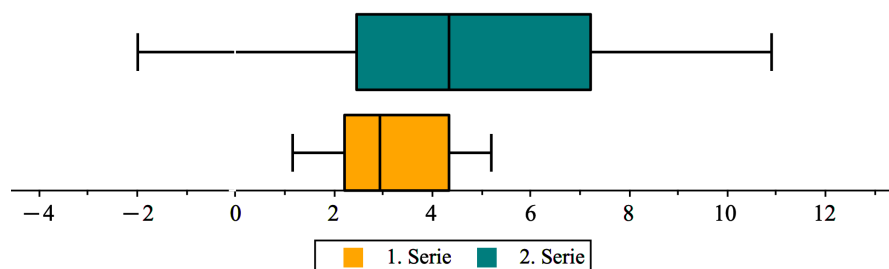
12.6 Sammenligning af boksplot

Det er ingen sag at vise to boksplots sammen, så to datasæt kan sammenlignes:

`data1 := [2.93, 2.58, 2.85, 4.26, 2.94, 4.33, 1.71, 4.42, 3.59, 4.35, 2.07, 1.16, 2.36, 1.25, 4.72, 5.2]:`

`data2 := [2.46, 4.34, 0.182, 3.22, 5.37, 10.5, 3.11, -1.99, -0.865, 2.56, 10.6, 10.9, 6.56, 7.22, 4.84]:`

`boksplot(data1, data2)`



Lidt mere tricky er det at vise to boksplots sammen, hvis det ene datasæt er givet ved kvartilerne samt minimum og maksimum.

Hvis fx *data1* skal afbildes sammen med et boksplot med fx:

min = 1

max = 10

kvartilsættet 3, 5, 7

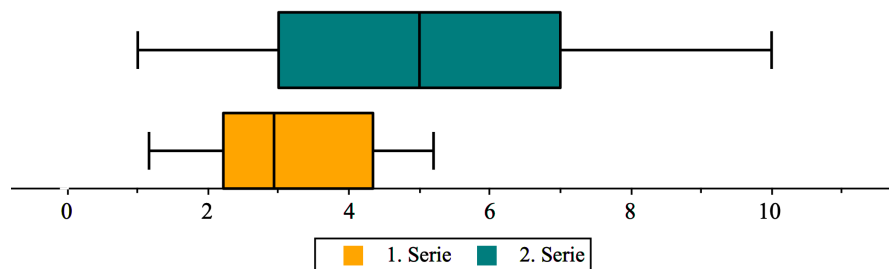
skal du afbilde følgende fiktive datasæt, hvor du doublerer medianen:

data := [1, 3, 5, 5, 7, 10]

data := [1, 3, 5, 5, 7, 10]

(12.4)

boksplot(*data1*, *data*)

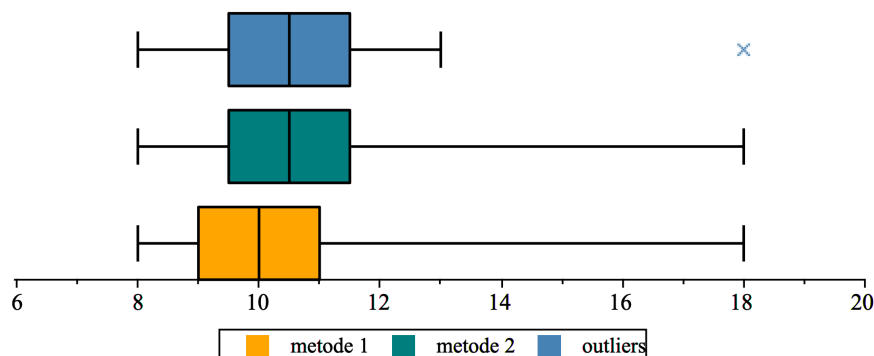


12.7 Sammenligning af 3 eller flere boksplots

Hvis du vil undersøge betydningen af den valgte metode og outliers ved dette observationssæt:

obs3 := [8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 18] :

kan du tegne 3 boksplots i samme system, men du skal her være opmærksom på, at syntaksen i kommandoen er ændret. Se online-hjælpen for flere detaljer.



13 Deskriptiv statistik: Grupperede observationer

13.1 Rå data

Gym-pakken indeholder nogle rutiner til behandling af ikke-grupperede og grupperede observationssæt, og skal være indlæst for at dette dokument vil fungere.

with(Gym) :

Data kan grupperes med kommandoen *grupperData* :

```
obs := [21.3, 13.7, 7.4, 13.4, 12.8, 9.2, 8.9, 4.2, 15.5, 11.9, 18.2, 14.1, 10.9, 21.7, 10.1,  
10.2, 4.2, 23.3, 21.7, 9.9, 16.1, 22.4, 8.5, 13.1, 15.3, 19.0, 14.4, 15.6, 18.2, 14.9,  
10.8, 13.7, 11.5, 24.8, 13.7, 14.6, 21.1, 10.1, 24.7, 15.6, 17.2, 12.4, 16.1, 12.9, 15.2,  
24.9, 26.1, 19.4, 19.4, 10.7] :
```

Start med at finde den mindste og den største observation:

$\min(obs) = 4.2$

$\max(obs) = 26.1$

Alle observationer ligger i al fald i intervallet $[0, 30]$. Dette interval kan fx opdeles i delintervaller af længde 5, og observationerne grupperes efter denne opdeling i 6 grupper:

$G := \text{grupperData}(obs, 0..30, 6)$

$$G := \begin{bmatrix} 0..5. & 2 \\ 5..10. & 5 \\ 10..15. & 20 \\ 15..20. & 13 \\ 20..25. & 9 \\ 25..30 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Intervalfrekvenserne og de kumulerede frekvenser finder du sådan her:

$$\text{frekvens}(G) = \begin{bmatrix} 0..5. & 0.04000 \\ 5..10. & 0.10000 \\ 10..15. & 0.40000 \\ 15..20. & 0.26000 \\ 20..25. & 0.18000 \\ 25..30 & 0.02000 \end{bmatrix}$$

13.2 Grupperede data

Hvis du får de grupperede data oplyst, så indtastes disse i en matrix med observationsintervallerne i 1. søjle og intervalhyppigheder (eller frekvenser) i 2. søjle.

$$H := \begin{bmatrix} 0 \dots 5 & 2 \\ 5 \dots 10 & 5 \\ 10 \dots 15 & 20 \\ 15 \dots 20 & 13 \\ 20 \dots 25 & 9 \\ 25 \dots 30 & 1 \end{bmatrix} :$$

Frekvenser og kumulerede frekvenser findes:

$$F := \text{frekvens}(H) = \begin{bmatrix} 0 \dots 5 & 0.04000 \\ 5 \dots 10 & 0.10000 \\ 10 \dots 15 & 0.40000 \\ 15 \dots 20 & 0.26000 \\ 20 \dots 25 & 0.18000 \\ 25 \dots 30 & 0.02000 \end{bmatrix}$$

$$\text{kumuleretFrekvens}(H) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0.04000 \\ 10 & 0.14000 \\ 15 & 0.54000 \\ 20 & 0.80000 \\ 25 & 0.98000 \\ 30 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

Du kan klare det hele i én arbejdsgang ved at få udskrevet en frekvenstabel over de grupperede data– du kan dog ikke benytte tabellen i senere beregninger, da det kun er tekst der udskrives

`frekvensTabel(H, decimaler = 2)`

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 5	2	4.00	4.00
5 .. 10	5	10.00	14.00
10 .. 15	20	40.00	54.00
15 .. 20	13	26.00	80.00
20 .. 25	9	18.00	98.00
25 .. 30	1	2.00	100.00

Hvis du hellere vil have en rigtig tabel, så tilføj du `output = tabel` i kommandoen:

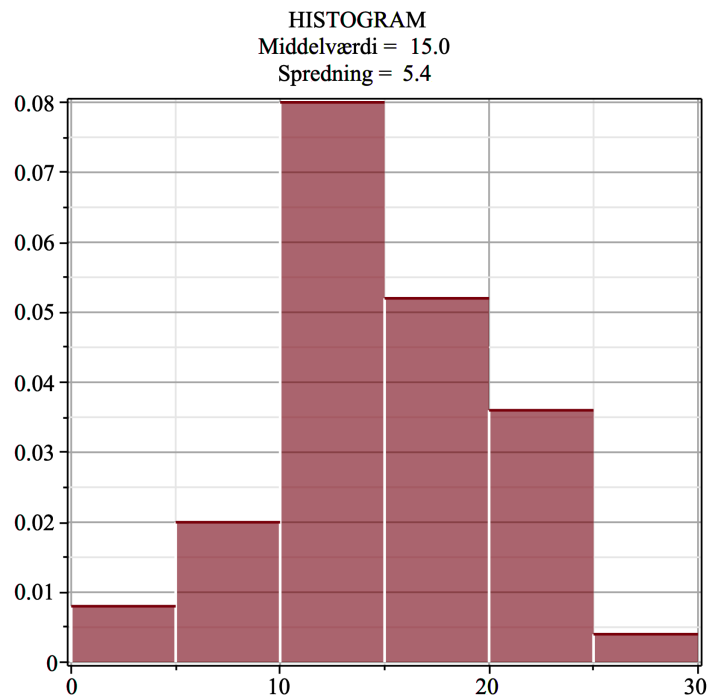
`frekvensTabel(H, decimaler = 2, output = tabel) :`

Observation	Hyppighed	Frekvens (%)	Kumuleret (%)
0 .. 5	2	4.00	4.00
5 .. 10	5	10.00	14.00
10 .. 15	20	40.00	54.00
15 .. 20	13	26.00	80.00
20 .. 25	9	18.00	98.00
25 .. 30	1	2.00	100.00

13.3 Histogram, sumkurve og deskriptorer

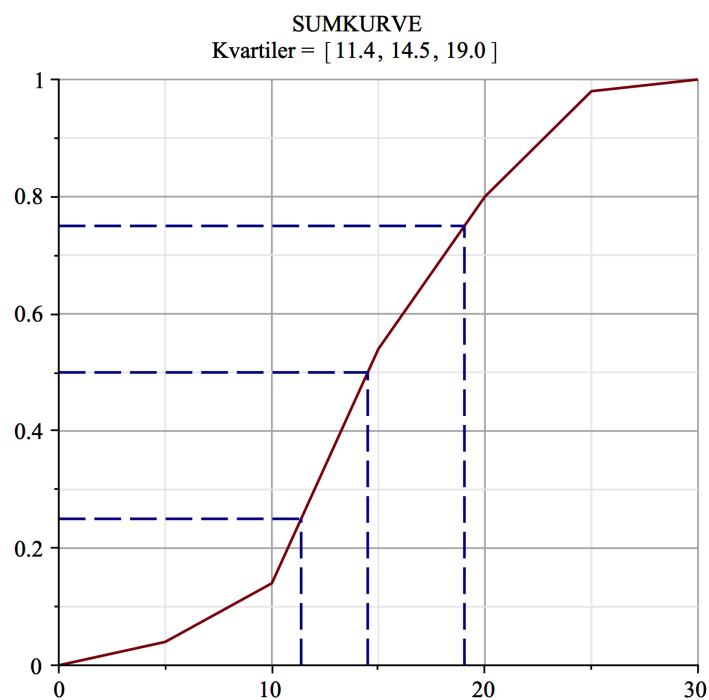
Histogrammet tegnes:

`plotHistogram (H)`



Her får du desuden oplysning om observationssættets middelværdi og spredning. Sumkurven plottes således:

`plotSumkurve (H)`



Her får du oplysning om observationssættets kvartilsæt med de tre linjer til aflæsning af kvartilerne indtegnet. Hvis du vil slette en eller flere af disse, klikker du på linjen og trykker Backspace.

Med Gym-pakken kan du også direkte få fat i de fleste deskriptorer

$$\text{middel}(H) = 15.00000$$

$$\text{varians}(H) = 29.25000$$

$$\text{spredning}(H) = 5.40833$$

$$\text{typetal}(H) = [10 \text{ } ..15]$$

$$\text{kvartiler}(H) = [11.375, 14.500, 19.038]$$

Gym-pakken indeholder også kommandoen *fraktil*. Denne skal du bruge, når du kender en y -værdi, og skal finde den tilhørende x -værdi.

Fx er

$$\text{fraktil}(H, 0.6) = 16.15384615$$

Det betyder, at 60% af observationerne er under 16.15.

Skal du gå den anden vej – altså, hvis du kender x -værdien og skal finde den tilhørende y -værdi, benytter du kommandoen *sumkurve*.

Fx er

$$\text{sumkurve}(H, 18) = 0.6960000000000000$$

Dvs., at 69.6% af observationerne er 18 eller derunder.

Endelig kan du få fat i forskriften for sumkurven med kommandoen

$$\text{sumkurve}(H, x)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ 0.008000000000000000 & 0 \leq x < 5 \\ 0.020000000000000000 & 5 \leq x < 10 \\ 0.080000000000000000 & 10 \leq x < 15 \\ 0.052000000000000000 & 15 \leq x < 20 \\ 0.036000000000000000 & 20 \leq x < 25 \\ 0.004000000000000000 & 25 \leq x < 30 \\ 1 & 30 \leq x \end{array} \right. \quad (13.2)$$

hvor parameteren x angiver navnet på den ønskede uafhængige variabel.

13.4 Boksplot af grupperede observationssæt

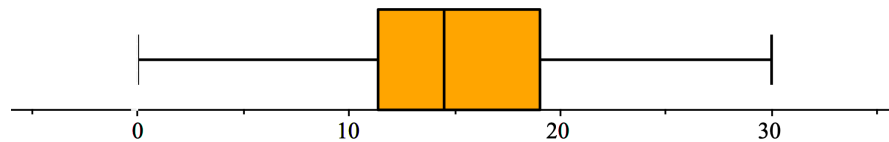
Er observationssættet grupperet, kender du ikke den mindste og den største observation, så i princippet er det ikke muligt at tegne et boksplot, med mindre ydergrænserne for grupperingen benyttes.

Lad os se på observationssættet

$$H := \left[\begin{array}{cc} 0 \dots 5 & 2 \\ 5 \dots 10 & 5 \\ 10 \dots 15 & 20 \\ 15 \dots 20 & 13 \\ 20 \dots 25 & 9 \\ 25 \dots 30 & 1 \end{array} \right] :$$

boksplot (*H*)

Kvartiler = [11.38, 14.50, 19.04]

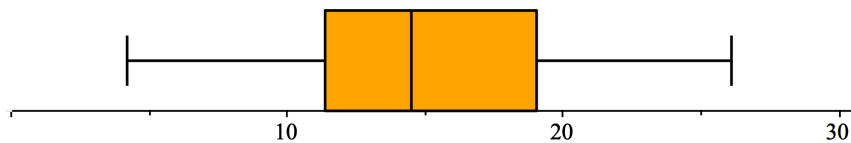


Her er mindste observation sat til 0 og den største til 30 – altså yderpunkterne i observationsintervallerne.

Hvis det oplyses, at disse er hhv. 4.2 og 26.1, så dette tilføjes i boksplottet

boksplot (*H*, *minmax* = {4.2, 26.1 })

Kvartiler = [11.38, 14.50, 19.04]



14 Binomialfordelingen

14.1 Opbygning af binomialfordelingen ganske kort

Start med at se på et **basalt eksperiment** E med to mulige udfald *succes* eller *fiasko* – dvs., at udfaldsrummet er

$$U = \{s, f\}$$

med sandsynlighederne

$$P(s) = p \quad P(f) = 1 - p.$$

Et par eksempler på et sådant eksperiment:

Kast med en ærlig mønt, hvor udfaldene *plat* eller *krone*

$$P(s) = \frac{1}{2} \quad P(f) = \frac{1}{2}.$$

Kast med en ærlig terning, hvor udfaldene *6'er* eller *ikke-6'er* observeres. Hvis udfaldet *6'er* anses for at være en succes, har vi

$$P(s) = \frac{1}{6} \quad P(f) = \frac{5}{6}$$

Binomialeksperiment

Det basale eksperiment gentages nu n gange, og de n gentagelser antages at være *uafhængige* af hinanden. Det betyder, at hvis der fx et tale om gentagne møntkast, så har mønten ingen hukommelse. Dvs., at sandsynligheden for at slå krone er den samme i alle gentagelser af eksperimentet.

Lad os som eksempel se på 6 gentagelser af et eksperiment med to mulige udfald $\{s, f\}$ med sandsynlighederne $P(s) = 0.4$ og $P(f) = 0.6$. Ved hver gentagelse noterer vi udfaldet, men er i øvrigt kun interesseret i antallet af succeser.

Et typisk udfald er en sekvens af s 'er og f 'er, fx *sffsff*, forstået på den måde, at i første forsøg fik vi s , i andet og tredje forsøg et f , i fjerde s , osv.

Da de enkelte forsøg er uafhængige, er sandsynligheden for at få netop sekvensen *sffsff* bestemt ved

$$P(\textit{sffsff}) = P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) \cdot P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) = 0.4^2 \cdot 0.6^4$$

Men enhver anden sekvens med 2 s 'er og 4 f 'er må have samme sandsynlighed (da faktorernes orden er ligegyldig)

$$P(\textit{ffssff}) = P(f) \cdot P(f) \cdot P(s) \cdot P(s) \cdot P(f) \cdot P(f) = 0.4^2 \cdot 0.6^4$$

Ved at finde alle – eller blot antallet – af sekvenser med 2 s 'er og 4 f 'er kan vi bestemme sandsynligheden for at få præcis 2 s 'er i 6 forsøg.

Vi kan få Maple til at udskrive alle kombinationer (og tælle op):

$$\textit{antal} := \textit{combinat}[\textit{permute}]([s, s, f, f, f, f])$$

$$\begin{aligned} \textit{antal} := & [[s, s, f, f, f, f], [s, f, s, f, f, f], [s, f, f, s, f, f], [s, f, f, f, s, f], [s, f, f, f, f, s], [f, s, s, f, f, f], \\ & [f, s, f, s, f, f], [f, s, f, f, s, f], [f, s, f, f, f, s], [f, f, s, s, f, f], [f, f, s, f, s, f], [f, f, s, f, f, s], \\ & [f, f, f, s, s, f], [f, f, f, s, f, s], [f, f, f, f, s, s]] \end{aligned} \quad (14.1)$$

Antallet af kombinationer kan findes med kommandoen *numelems* (number of elements), der tæller op, hvor mange permutationer der er i ovenstående svar

$$\text{numelems}(\text{antal}) = 15$$

Dvs, at sandsynligheden for at få præcis 2 s'er i 6 forsøg er

$$15 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^4 = 0.311040$$

Helt tilsvarende kan du finde sandsynlighederne for de andre udfald. De nemmeste at finde er for 0 s'er og for 1 s:

Den eneste sekvens med 0 s'er er *ffffff*, og denne har sandsynligheden

$$0.6^6 = 0.046656$$

Der er 6 sekvenser med 1 s: *sfffff*, *fsffff*, ..., og alle sekvenser har sandsynligheden $0.4 \cdot 0.6^5$. Sandsynligheden for 1 s er derfor

$$6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 = 0.186624$$

Find selv sandsynligheden for 3, 4, 5 og 6 s'er. Brug Maple til at tælle sekvenser med, hvis du er i tvivl om, hvor mange der er.

Maple har naturligvis bedre værktøjer til optælling af sekvenser med 2 s'er:

$$\text{binomial}(6, 2) = 15$$

For at forstå disse tal er det nemmest at tænke på et skema med 6 felter, der skal udfyldes med enten *s* eller *f*. Antallet af forskellige måder, hvorpå du kan udvælge 2 felter ud af 6 (og skrive *s* i disse) er $\text{binomial}(6, 2)$. Pr. automatik kommer der så til at stå *f* i de 4 tilbageværende.

Du har sikkert bemærket, at $\text{binomial}(6, 4)$ også er lig med 15. Er der en god forklaring på dette?

Vi kan nu skrive en formel op for sandsynligheden for at få *r* s'er i 6 forsøg:

$$P(r) := \text{binomial}(6, r) \cdot 0.4^r \cdot 0.6^{6-r}$$

$$P := r \mapsto \binom{6}{r} 0.4^r 0.6^{6-r} \quad (14.2)$$

Læg i øvrigt mærke til, at Maple oversætter $\text{binomial}(6, r)$ til $\binom{6}{r}$. Det kan du naturligvis også skrive i stedet for $\text{binomial}(6, r)$.

Skabelonen hertil finder du i Expression-paletten som $\binom{a}{b}$.

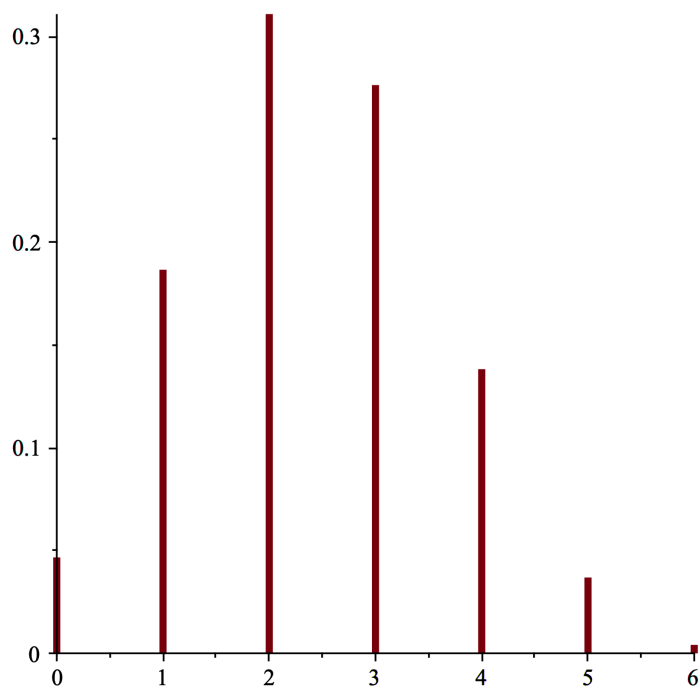
Lad os samle tallene i en tabel:

Antal succes	Sandsynlighed	Kummuleret
0	$\binom{6}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^6 = 0.0466560$	0.0466560
1	$\binom{6}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^5 = 0.186624$	0.2332800
2	$\binom{6}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^4 = 0.311040$	0.5443200
3	$\binom{6}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 = 0.276480$	0.8208000
4	$\binom{6}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^2 = 0.138240$	0.9590400
5	$\binom{6}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^1 = 0.036864$	0.9959040
6	$\binom{6}{6} \cdot 0.4^6 \cdot 0.6^0 = 0.0040960$	1.0000000

Punktsandsynlighederne illustreres med et pindediagram (med $n = 6$ og $p = 0.4$) – *pindediagramBIN* findes i Gym-pakken:

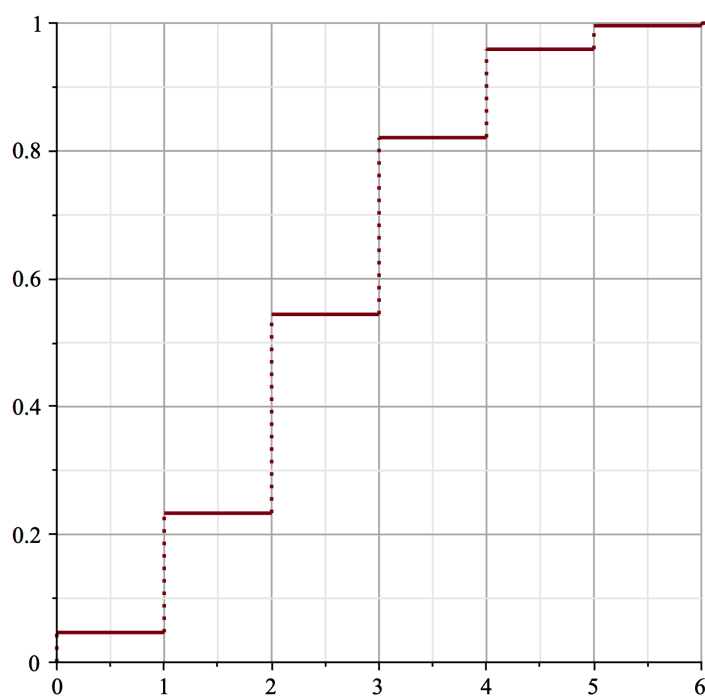
with(Gym) :

pindediagramBIN (6, 0.4)



De kummulerede sandsynligheder illustreres med en trappekurve (med $n = 6$ og $p = 0.4$) – *trappekurveBIN* findes i Gym-pakken):

trappekurveBIN (6, 0.4)



14.2 Binomialfordelingen - definition

Udfaldsrummet U for ovenstående eksperiment er sekvenser af længden 6 bestående af s 'er og f 'er - i alt $2^6 = 64$ elementer. Dvs.,

$$U = \{ssssss, fsssss, sfssss, \dots, sssssf, fsssss, fsfsss, \dots, sssfff, \dots, ffffff\}$$

På U definerer vi en funktion X ved

$$X(u) = \text{antal } s\text{'er i } u, \quad u \in U$$

Fx er $X(ssffff) = 2$ og $X(sfsssf) = 4$. X kan kun antage værdier i mængden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Funktionen X kaldes en **stokastisk variabel**.

Idet sandsynligheden for, at X antager værdien r betegnes $P(X=r)$, kan vi skrive

$$P(X=r) = \binom{6}{r} \cdot 0.4^r \cdot 0.6^{6-r}$$

Tilsvarende betegnes sandsynligheden for, at X antager værdien højst r med $P(X \leq r)$, hvilket er de kumulerede sandsynligheder:

$$P(X \leq r) = \sum_{i=0}^r \binom{6}{i} \cdot 0.4^i \cdot 0.6^{6-i}$$

Med disse betegnelser ser ovenstående tabel sådan ud

r	$P(X=r)$	$P(X \leq r)$
0	0.046656	0.046656
1	0.186624	0.233280
2	0.311040	0.544320
3	0.276480	0.820800
4	0.138240	0.959040
5	0.036864	0.995904
6	0.004096	1.000000

Generelt ser setup sådan ud:

Definition

Lad E være et eksperiment med udfaldsrum $U = \{s, f\}$ og $P(s) = p$.

Et **binomialeksperiment** er n uafhængige gentagelser af eksperimentet E . Tallet n kaldes antalsparameteren og tallet p kaldes sandsynlighedsparameteren.

Definition

En binomialfordelt stokastisk variabel X er en stokastisk variabel, som tæller antallet af succeser i et binomialeksperiment.

Sætning

Sandsynlighedsfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p er bestemt ved:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Notation

Hvis X er en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p skriver vi

$$X \sim bi(n, p).$$

Definition

Fordelingsfunktionen for en binomialfordelt stokastisk variabel er defineret ved:

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{i=0}^t P(X=i)$$

Lige et par ord om fordelingsfunktionen:

Af definitionen følger, at fordelingsfunktionen er defineret for alle reelle tal. Hvis t er negativ, er $F(t) = 0$, idet den stokastiske variabel X ikke kan antage negative værdier.

For $t = 0$ er:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=0)$$

Det betyder, at F foretager et spring i 0 svarende til sandsynligheden for at få 0 succeser. I intervallet $]0, 1[$ er F konstant med værdien $P(X=0)$.

For $t = 1$ er

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

så her foretager F et spring på $P(X=1)$, og er herefter konstant i $]1, 2[$.

Således fortsættes indtil $t > n$, hvor efter F er konstant med værdien 1. Grafen for F bliver altså en trappekurve med spring i $0, 1, \dots, n$.

14.3 Eksempler

with(Gym) :

Med Gym-pakken indlæst har du nem adgang til både sandsynlighedsfunktionen *binpdf* og fordelingsfunktionen *bincdf*. I funktionsnavnene står 'pdf' for 'probability density function' og 'cdf' for 'cumulative distribution function'.

Syntaksen vil fremgå af dette eksempel:

Lad den stokastiske variabel X være defineret ved

X = antal 6'ere i 10 kast med en terning

så ved vi, at $X \sim bi\left(10, \frac{1}{6}\right)$.

a)

Sandsynligheden for at slå **netop** 3 seksere kan bestemmes ved:

$$\text{binpdf}\left(10, \frac{1}{6}, 3\right) = 0.1550453596$$

b)

Sandsynligheden for **højst** 3 seksere (dvs. 0, 1, 2 eller 3 seksere)

$$\text{bincdf}\left(10, \frac{1}{6}, 3\right) = 0.9302721574$$

hvilket også kan skrives på en måde, der bedre afspejler, at antallet skal være 0,1,2 eller 3:

$$\text{bincdf}\left(10, \frac{1}{6}, 0, 3\right) = 0.9302721574$$

c)

Sandsynligheden for **mindst** 3 seksere (dvs. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eller 10 seksere):

$$1 - \text{bincdf}\left(10, \frac{1}{6}, 2\right) = 0.2247732021$$

hvilket også kan skrives på en måde, der bedre afspejler, at antallet skal være 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eller 10:

$$\text{bincdf}\left(10, \frac{1}{6}, 3, 10\right) = 0.2247732021$$

14.3.1 Eksempel 1

I et spil er sandsynligheden for at vinde 0.15. Spillet spilles 22 gange. Hvad er

1. Sandsynligheden for at vinde netop 2 gange
2. Sandsynligheden for at vinde højst 2 gange
3. Sandsynligheden for at vinde mindst 2 gange
4. Sandsynligheden for at vinde mellem 2 og 5 gange.
5. Tegn et pindediagram
6. Hvad er det største antal gange, spillet må spilles, hvis sandsynligheden for, at vinde højst 2 gange, ikke må komme under 0.5.

with(Gym) :

Lad X være defineret ved:

$X =$ antal gevinster i 22 gentagelser af et spil

så ved vi, at $X \sim bi(22, 0.15)$.

1)

Sandsynligheden for at vinde netop 2 gange. Her er det $P(X=2)$ du skal finde:

$$\text{binpdf}(22, 0.15, 2) = 0.2014526628$$

2)

Sandsynligheden for at vinde højst 2 gange. Her er det $P(X \leq 2)$ du skal finde:

$$\text{bincdf}(22, 0.15, 0, 2) = 0.3381769087$$

3)

Sandsynligheden for at vinde mindst 2 gange. Her skal du udregne $P(X \geq 2)$, hvilket er det samme som $1 - P(X \leq 1)$:

$$\text{bincdf}(22, 0.15, 2, 22) = 0.8632757541$$

– eller

$$1 - \text{bincdf}(22, 0.15, 1) = 0.8632757541$$

4)

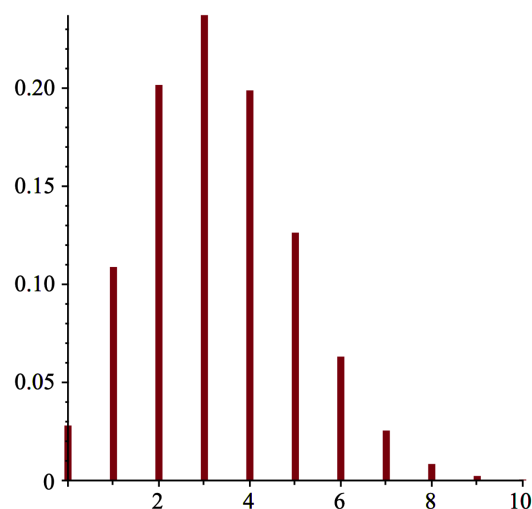
Sandsynligheden for at vinde mellem 2 og 5 gange

$$\text{bincdf}(22, 0.15, 2, 5) = 0.7633305050$$

– eller

$$\text{bincdf}(22, 0.15, 5) - \text{bincdf}(22, 0.15, 1) = 0.7633305050$$

5)

pinediagramBIN (22, 0.15)

6)

Hvad er det største antal gange, spillet må spilles, hvis sandsynligheden for, at vinde højst 2 gange, ikke må komme under 0.5.

Ovenfor har vi udregnet, at hvis spillet spilles 22 gange, så er sandsynligheden for at vinde højst 2 gange ca. 0.34. Der skal altså spilles færre gange.

Vi kan naturligvis prøve os frem ved at ændre antalsparameteren i ovenstående udregning og genberegne.

$$\text{bincdf}(22, 0.15, 0, 2) = 0.3381769087$$

$$\text{bincdf}(21, 0.15, 0, 2) = 0.3704955177$$

$$\text{bincdf}(20, 0.15, 0, 2) = 0.4048962780$$

$$\text{bincdf}(19, 0.15, 0, 2) = 0.4413206124$$

$$\text{bincdf}(18, 0.15, 0, 2) = 0.4796620171$$

$$\text{bincdf}(17, 0.15, 0, 2) = 0.5197576036$$

Men skal det gøres ordentligt, så skal vi løse ligningen (brug 'numerically solve'):

$$\text{bincdf}(n, 0.15, 2) = 0.5 \xrightarrow{\text{solve}} 17.48761469$$

Dette viser, at spillet højst må spilles 17 gange.

14.3.2 Eksempel 2 - Tips13

1. Hvad er sandsynligheden for at tippe en 10'er i Tips13?
2. Hvad er sandsynligheden for gevinst i Tips13
3. Hvor mange rigtige er der størst sandsynlighed for at tippe?

På en Tips13 kupon skal vi tippe (gætte) resultatet i 13 fodboldkampe ved at vælge et af tegnene 1, x og 2 (1 for hjemmesejr, x for uafgjort og 2 for udesejr).

Hvis vi absolut ikke har forstand på fodbold, kan udfyldningen af en tipskupon opfattes som et binomialeksperiment med antalsparameter 13 og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{3}$. Det basale eksperiment er at tippe resultatet i én kamp - dvs. vælge ét af tegnene 1, x eller 2. Der er så én mulighed for at vælge rigtigt og to muligheder for at vælge forkert. Når det handler om at tippe rigtigt, må $p = \frac{1}{3}$.

Til beskrivelsen af Tips13 skal vi altså bruge en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter $n = 13$ og sandsynlighedsparameter $p = \frac{1}{3}$. Altså $X \sim bi\left(13, \frac{1}{3}\right)$.

with(Gym) :

1)

Sandsynligheden for at tippe 10 rigtige

$$\text{binpdf}\left(13, \frac{1}{3}, 10\right) = 0.001435091885$$

2)

Sandsynligheden for gevinst (10, 11, 12 og 13 rigtige giver gevinst)

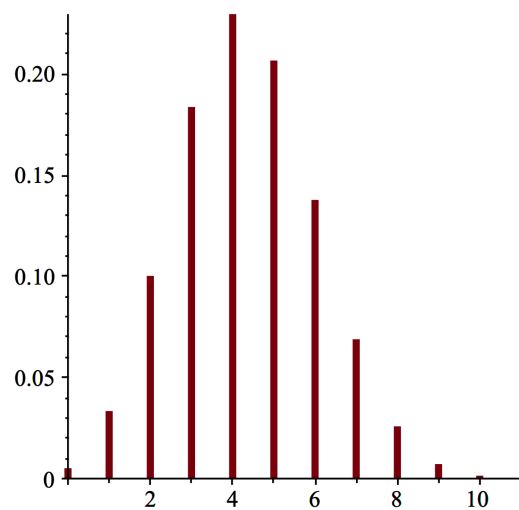
$$\text{bincdf}\left(13, \frac{1}{3}, 10, 13\right) = 0.001647721321$$

3)

Hvor mange rigtige er der størst sandsynlighed for at tippe?

Hertil tegner vi pindediagrammet og finder den længste pind:

pindediagramBIN $\left(13, \frac{1}{3}\right)$



Pindediagrammet viser, at 4 rigtige er det mest sandsynlige.

15 Binomialtest

15.1 Ensidet test

En stikprøve kan i princippet udtages på to forskellige måder:

- **med tilbagelægning.**

Her udvælges elementerne ét ad gangen. Det udtagne elements egenskab (ok eller defekt) noteres, og elementet lægges tilbage. Elementerne blandes før næste element udtages. Det samme element kan således optræde flere gange i stikprøven.

- **uden tilbagelægning.**

Her udvælges alle elementer på én gang, så et element højst kan indgå én gang i stikprøven.

Vi skal her kun se på stikprøver med tilbagelægning, idet disse kan beskrives som binomialeksperimenter.

Hvis der er (rigtig) mange elementer i populationen, hvorfra stikprøven udtages, er det i praksis uvæsentligt, om det sker med eller uden tilbagelægning, som i dette eksempel:

En frøproducent garanterer, at mindst 80% af de frø, han leverer, spirer.

Vi vil undersøge denne påstand ved at udtage en stikprøve på 50 frø, og se, hvordan disse frø spirer. Hvis flere end 80% af frøene spirer, vil vi være tilfredse og godtage garantien, men hvis færre end 80% spirer, er sagen mere kritisk.

Nu viser det sig imidlertid, at 37 frø spirer. Hvordan vi skal forholde os til det i lyset af, at 80% af 50 jo er 40.

Matematisk går man sådan til værks:

Vi ønsker at **teste hypotesen**:

H_0 : 80% af frøene spirer

mod **alternativet**

H_1 : mindre end 80% af frøene spirer

ved at udtage en stikprøve på 50 frø.

Vi kan naturligvis ikke på grundlag af stikprøven bevise om hypotesen er sand eller falsk. Vi kan kun vurdere den fremsatte påstand og komme med én af følgende to konklusioner:

H_0 må forkastes på det foreliggende grundlag

H_0 kan ikke forkastes på det foreliggende grundlag.

Lad X være den stokastiske variabel:

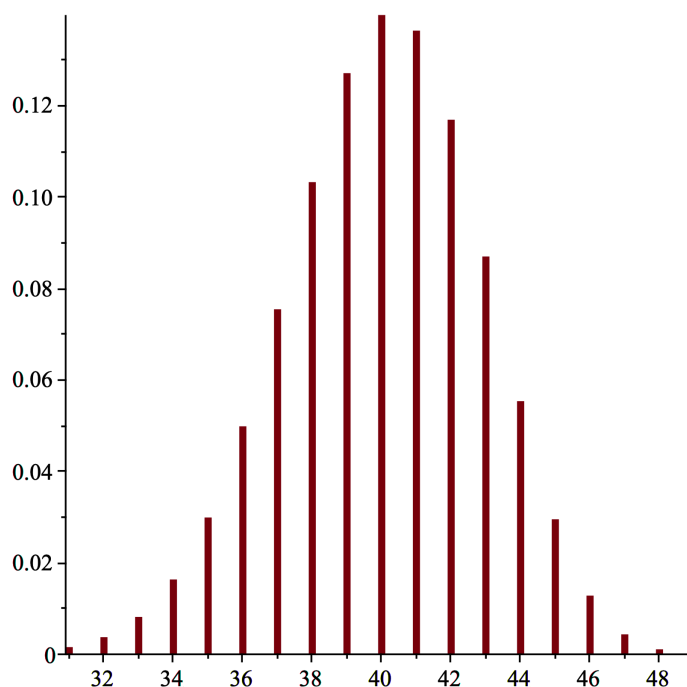
X = antal frø der spirer ud af de 50 udtagne.

Hvis hypotesen H_0 holder, så er $X \sim bi(50, 0.80)$.

Middelværdien af X er $n \cdot p = 50 \cdot 0.80 = 40$, hvilket svarer til 80% af stikprøven. Vi skal nu afgøre, hvor stor en afvigelse fra 40, vi vil acceptere – eller med andre ord, hvor langt skal vi under 40 før vi vil forkaste hypotesen.

Lad os definere X , og tage et kig på pindediagrammet

with(Gym) :
 pinediagramBIN (50, 0.8)



Pinediagrammet viser, at der er ganske meget sandsynlighed 'under' 40 – helt præcist

$$\text{bincdf}(50, 0.8, 0, 39) = 0.4164405814$$

– eller med andre ord, så er der en sandsynlighed på ca 0.42 for at færre end 40 frø spirer.

Lad os sige, at fx 37 er det mindste vi vil acceptere. Så testens **kritiske mængde** er

$$K = \{0, 1, 2, \dots, 37\}$$

og **testens acceptmængde** er

$$A = \{38, 39, \dots, 50\}$$

Et udfald i den kritiske mængde fører til, at vi vil forkaste hypotesen. Når den kritiske mængde, som her, ligger i venstre side, kaldes testen **venstresidet**.

Ved en hypotesetest kan vi begå to fejl:

	H_0 forkastes	H_0 forkastes ikke
H_0 er sand	fejl af 1. art	OK
H_0 er falsk	OK	fejl af 2. art

Med ovenstående valg af kritisk mængde, altså $K = \{0, 1, 2, \dots, 37\}$, er sandsynligheden for fejl af 1. art

$$\text{bincdf}(50, 0.8, 0, 37) = 0.1860569934$$

Dvs., at der er over 18% sandsynlighed for, at vi forkaster hypotesen selvom den er sand! En så stor sandsynlighed for fejl af 1. art anses for uacceptabel, så vores kritiske mængde er for stor.

Normalt fastlægger man den kritiske mængde ved på forhånd at vedtage, hvor stor en sandsynlighed for fejl af 1. art, man vil tillade. Denne sandsynlighed kaldes for testens **signifikansniveau**. Som regel vælger man her 5%. Fejl af 2. art vender vi tilbage til senere.

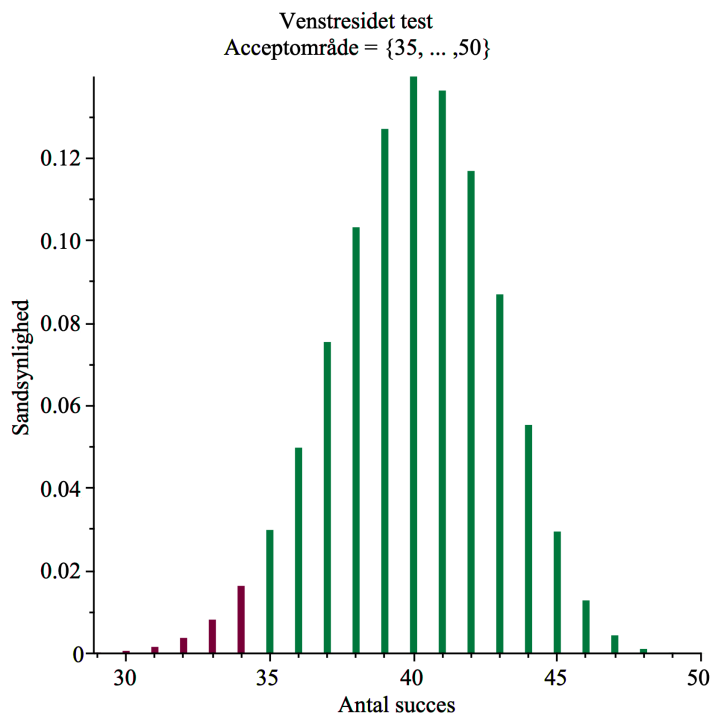
Vi skal altså her bestemme den største observation, hvis kumulerede sandsynlighed er mindre end eller lig med 0.05. Vi kan naturligvis prøve os frem, men Gym-pakken indeholder funktion *invbin*, der netop er beregnet til dette

`invbin(50, 0.8, 0.05) = 35`

Alt i alt vil en venstresidet test af hypotesen på signifikansniveau 5% føre til, at den kritiske mængde bliver $K = \{0, 1, \dots, 34\}$.

Et pindediagram, der viser den kritiske mængde og acceptmængden ved denne venstresidede test, kan se sådan ud, hvor summen af de røde pinde er mindre end 0.05 (signifikansniveauet):

`binomialTest(50, 0.8, 0.05, venstre)`



15.2 Tosidet test

Vi skal checke, om en mønt er symmetrisk. Vi fremsætter hypotesen

$$H_0: p = \frac{1}{2}$$

hvor p er sandsynligheden for at mønten viser krone. Hypotesen testes ved at kaste mønten 100 gange og tælle antallet af gange mønten viser krone. Signifikansniveauet skal være 5%.

Lad X være den stokastiske variable, der tæller antallet af krone ved 100 kast med mønten. Holder hypotesen H_0 , vil X være binomialfordelt $X \sim bi\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

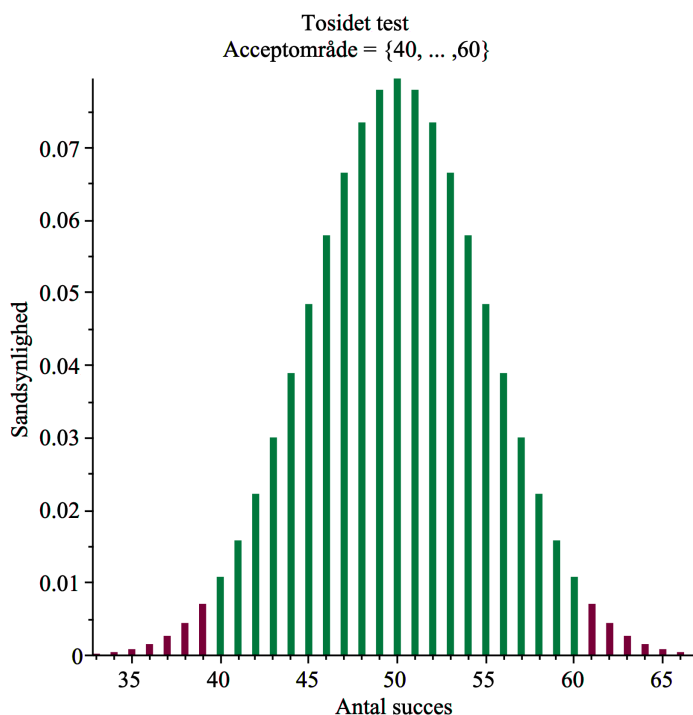
Det er klart, at såvel små som store værdier af X vil være kritiske for hypotesen $p = \frac{1}{2}$. Den kritiske mængde må derfor ligge dels til venstre, og dels til højre i fordelingen. Vi placerer $2\frac{1}{2}\%$ i begge sider.

$$\text{invbin}\left(100, \frac{1}{2}, 0.025\right) = 40$$

$$\text{invbin}\left(100, \frac{1}{2}, 0.975\right) = 60$$

Den kritiske mængde er således $K = \{0, 1, \dots, 39\} \cup \{61, 62, \dots, 100\}$

$\text{binomialTest}(100, 0.5, 0.05, \text{tosidet})$



15.3 Fejl af 1. og 2. art

(Kilde: Tommy Borch, Statistik, FAG, 1981)

Det klassiske eksempel her er en person (Carl) der hævder, at han kan smage forskel på en Carlsberg og en Tuborg – ikke hver gang, men 3 ud af 4 gange.

Det tror vi ikke på, og vil derfor teste Carls evner ved at lade ham blindsmage et antal glas øl og fortælle, om der er Carlsberg eller Tuborg i glasset.

Vi forsøger først med 12 glas, og opstiller den hypotese, at det er helt tilfældigt, om Carl rammer rigtigt

$$H_0: p = \frac{1}{2}$$

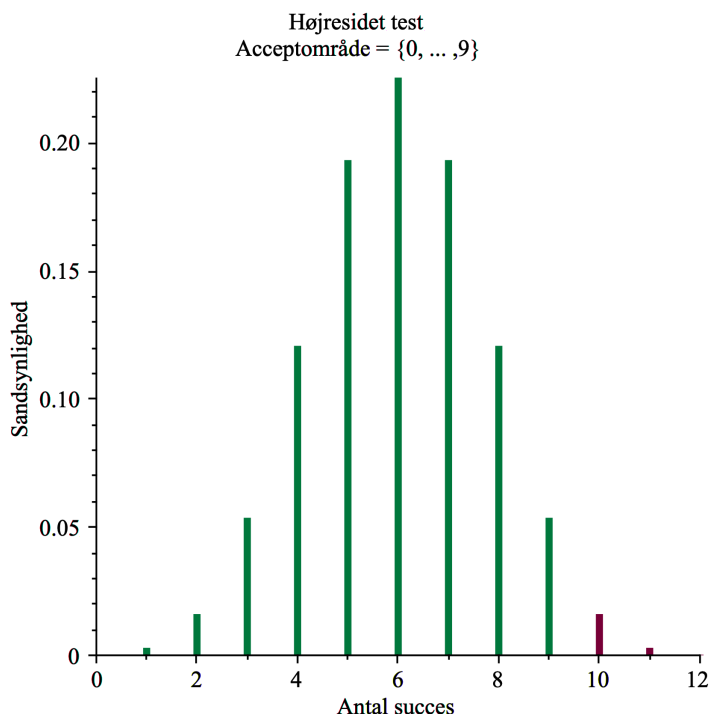
Her overfor står Carls alternative hypotese

$$H_1: p \geq \frac{3}{4}$$

Testen er højresidet, idet et stort antal rigtige svar er kritiske for H_0 , og taler til gunst Carls alternative hypotese. Signifikansniveauet er 5%.

$$\text{invbin}(12, 0.5, 0.95) = 9$$

Dvs., at den kritiske mængde er $K = \{10, 11, 12\}$.



Sandsynligheden for fejl af 1. art er :

$$\text{bincdf}(12, 0.5, 10, 12) = 0.0192871093$$

– altså 1.9%.

Hvad er så sandsynligheden for fejl af 2. art, altså hvor vi accepterer vores hypotese H_0 , selvom H_1 faktisk er sand. Hertil skal vi beregne sandsynligheden for at have i vores acceptmængde $\{0, 1, \dots, 9\}$ under forudsætning af, at Carls alternative hypotese holder

$$\text{ - dvs. } p = \frac{3}{4} . \text{bincdf}(12, 0.75, 0, 9) = 0.6093249916$$

– altså er sandsynligheden for fejl af 2. art ca. 61%. Dette er naturligvis helt uacceptabelt for Carl, så denne sandsynlighed skal gøres mindre. Dette kan ske ved at vi ændrer den kritiske mængde, men så gør vi jo sandsynligheden for fejl af 1. art større.

Der er kun ét at gøre: Øge antallet af prøvesmagninger. Lad os prøve med 24:

$$\text{invbin}(24, 0.5, 0.95) = 16.$$

Dvs $K = \{17, 18, \dots, 24\}$, og sandsynligheden for fejl af 1. art er

$$\text{bincdf}(24, 0.5, 17, 24) = 0.0319573285$$

Sandsynligheden for fejl af 2. art er så

$$\text{bincdf}(24, 0.75, 0, 16) = 0.2337958307$$

Dette er også for meget! Prøv selv at finde det antal prøvesmagninger, der skal til, for at få sandsynligheden for fejl af 1. art og 2. art under 5%.

15.4 Oversigt

Hypotese	Alternativ	Testtype
$H_0: p = p_0$	$H_1: p \neq p_0$	Tosidet test $K = \{0, 1, \dots, c_1\} \cup \{c_2, \dots, n\}$ $c_1 = \text{invbin}\left(n, p, \frac{\alpha}{2}\right) - 1$ $c_2 = \text{invbin}\left(n, p, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) + 1$
	$H_1: p > p_0$	Højresidet test $K = \{c, \dots, n\}$ $c = \text{invbin}(n, p, 1 - \alpha) - 1$
	$H_1: p < p_0$	Venstresidet test $K = \{0, \dots, c\}$ $c = \text{invbin}(n, p, \alpha) - 1$

16 Normalfordelingen

16.1 Data

Data består her af resultatet af en vejning af 500 personer.

Data vil her blive behandlet som et grupperet observationssæt, hvor vi selv laver grupperingen og Maple laver optællingen i grupper.

```
data := [74.53, 67.80, 65.93, 65.28, 78.37, 70.05, 68.41, 68.06, 62.48, 74.44, 64.38, 81.88, 54.13, 71.39,
75.11, 73.86, 75.08, 73.62, 68.16, 59.48, 59.36, 76.37, 62.02, 69.17, 76.16, 65.68, 66.35, 83.68, 70.35,
62.97, 70.49, 70.30, 71.94, 66.13, 75.68, 70.36, 63.50, 64.09, 65.95, 79.44, 57.90, 64.87, 77.17, 61.36,
57.03, 72.95, 71.51, 59.59, 67.28, 75.41, 67.98, 67.98, 77.58, 77.68, 62.43, 58.59, 70.87, 68.61, 74.54,
82.89, 63.60, 71.93, 71.88, 71.02, 77.05, 68.64, 89.48, 75.01, 74.32, 75.32, 67.79, 71.23, 74.72, 84.41,
73.58, 82.03, 63.29, 69.07, 69.74, 75.91, 76.49, 73.68, 73.39, 64.58, 75.98, 72.66, 76.27, 62.34, 64.63,
71.13, 67.53, 72.24, 79.80, 73.84, 77.81, 75.02, 73.99, 62.41, 65.18, 72.79, 66.57, 70.17, 68.98, 75.47,
73.44, 58.52, 78.76, 63.14, 78.82, 79.68, 71.99, 61.78, 80.92, 62.63, 64.80, 66.32, 70.06, 81.70, 59.47,
65.94, 60.88, 68.70, 68.06, 52.81, 81.10, 68.90, 56.25, 64.07, 62.18, 72.05, 88.77, 57.25, 68.37, 77.90,
71.58, 82.59, 69.01, 79.33, 66.69, 68.81, 72.51, 71.39, 68.68, 70.71, 58.42, 74.92, 70.53, 78.38, 68.56,
76.59, 71.67, 67.88, 69.49, 81.05, 59.51, 81.18, 62.52, 69.44, 75.97, 65.45, 77.00, 73.87, 70.42, 71.77,
64.43, 79.25, 71.04, 67.39, 84.27, 60.53, 65.19, 80.37, 73.95, 73.01, 55.43, 76.24, 68.24, 70.44, 76.59,
59.62, 64.96, 75.78, 79.79, 64.60, 64.21, 71.06, 67.05, 65.93, 69.64, 65.84, 70.20, 83.86, 69.30, 63.93,
73.49, 80.36, 60.01, 76.99, 65.46, 72.74, 66.76, 61.79, 66.28, 71.12, 79.16, 63.00, 61.83, 79.57, 62.33,
81.55, 62.88, 57.28, 65.08, 64.50, 69.57, 64.55, 65.36, 80.49, 63.76, 71.89, 68.77, 64.91, 74.82, 65.33,
64.02, 62.17, 75.52, 65.51, 67.44, 67.74, 66.40, 60.35, 75.40, 76.41, 83.53, 69.92, 63.61, 71.29, 71.09,
71.70, 61.70, 69.14, 80.62, 59.61, 66.15, 70.52, 68.00, 66.92, 67.75, 67.85, 69.19, 80.16, 68.56, 66.37,
76.97, 88.08, 81.27, 67.97, 73.35, 83.31, 57.61, 59.52, 66.74, 72.77, 70.32, 80.34, 74.03, 58.27, 71.67,
74.72, 68.70, 84.24, 71.94, 71.14, 65.38, 66.25, 63.20, 64.53, 67.70, 69.45, 66.50, 70.61, 65.81, 63.68,
77.50, 77.67, 66.25, 65.08, 74.62, 67.40, 75.87, 74.12, 65.61, 61.80, 71.43, 77.40, 63.29, 72.96, 69.65,
66.24, 61.39, 59.06, 60.01, 76.07, 62.37, 67.93, 64.08, 68.35, 68.41, 65.61, 63.44, 76.75, 61.73, 61.66,
77.15, 65.67, 75.05, 75.14, 80.21, 84.97, 72.65, 76.02, 65.95, 79.32, 74.61, 65.92, 54.66, 67.29, 74.99,
73.56, 73.43, 52.25, 76.94, 77.50, 73.31, 66.78, 58.60, 60.51, 68.32, 80.96, 52.73, 60.68, 69.44, 72.04,
75.12, 76.51, 69.82, 72.91, 72.01, 68.12, 55.06, 65.62, 75.31, 73.69, 67.89, 66.06, 66.50, 71.18, 77.45,
69.23, 66.05, 65.01, 68.95, 72.31, 72.20, 73.40, 73.57, 73.67, 73.87, 71.86, 72.03, 74.99, 72.85, 70.04,
61.87, 62.62, 71.54, 59.95, 76.69, 71.77, 78.58, 83.12, 76.52, 70.52, 59.26, 79.35, 72.68, 71.12, 77.13,
71.86, 68.51, 62.58, 75.45, 67.17, 75.68, 78.54, 72.34, 79.51, 78.50, 59.07, 77.68, 75.75, 65.25, 70.32,
80.27, 63.40, 69.53, 74.34, 78.84, 65.46, 83.23, 59.87, 62.61, 73.78, 72.95, 75.35, 72.38, 79.71, 75.11,
64.04, 64.35, 72.78, 67.44, 60.54, 79.69, 75.42, 69.00, 67.15, 69.58, 74.59, 72.08, 69.03, 59.85, 64.84,
64.12, 74.64, 64.66, 74.97, 76.87, 56.17, 83.38, 65.96, 64.14, 64.85, 68.99, 67.54, 62.60, 69.31, 76.10,
64.63, 74.94, 71.37, 68.00, 74.20, 66.31, 70.28, 58.16, 63.84, 78.69, 58.80, 69.35, 69.24, 75.50, 67.41,
69.62, 68.15, 67.36, 74.93, 74.89, 58.35, 79.08, 64.41, 71.77, 59.29, 60.67, 80.16, 77.03, 67.01, 72.91,
64.03, 78.68, 71.55, 76.91, 72.22, 68.08, 70.18, 68.65, 64.37, 67.99, 64.37, 76.09, 71.17, 63.39, 71.01,
71.76, 82.65, 75.25, 70.90, 62.32, 73.93] :
```

16.2 Gruppering af data, histogram og sumkurve

with(Gym) :

Sørg for, at du har data indlæst: I sektionen ovenfor skal du klikke i data og taste Enter.

For at danne dig et overblik over data, finder du den største og den mindste observation:

$\min(data) = 52.25$

$\max(data) = 89.48$

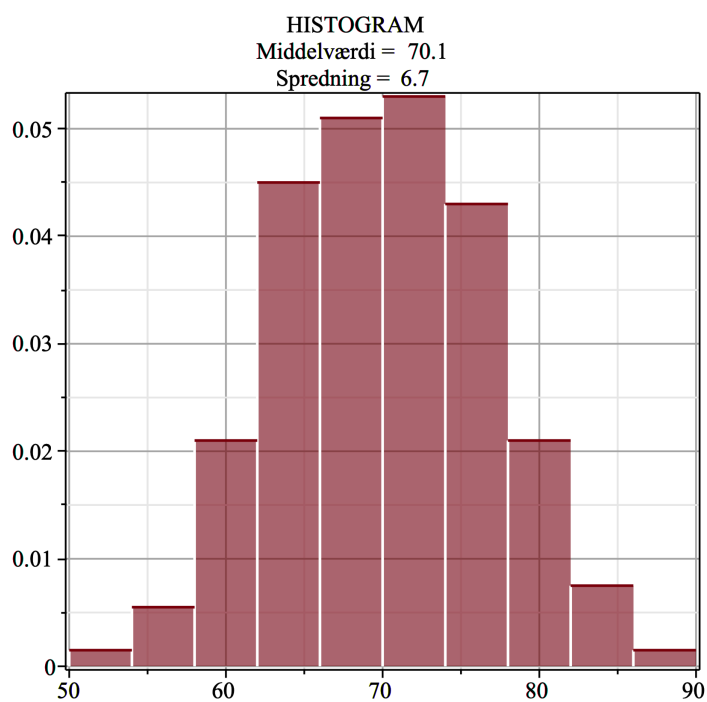
Dette viser, at data ligger i intervallet $[50, 90]$. Dette interval skal opdeles i en række delintervaller – fx 10 – af længde 4:

$M := \text{grupperData}(\text{data}, [50..90], 10)$

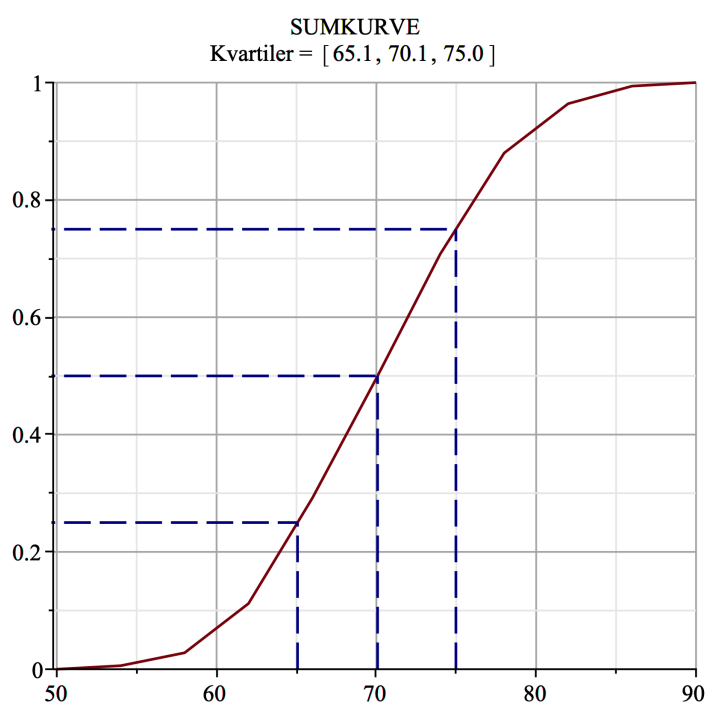
$$M := \begin{bmatrix} 50..54. & 3 \\ 54..58. & 11 \\ 58..62. & 42 \\ 62..66. & 90 \\ 66..70. & 102 \\ 70..74. & 106 \\ 74..78. & 86 \\ 78..82. & 42 \\ 82..86. & 15 \\ 86..90 & 3 \end{bmatrix}$$

(16.1)

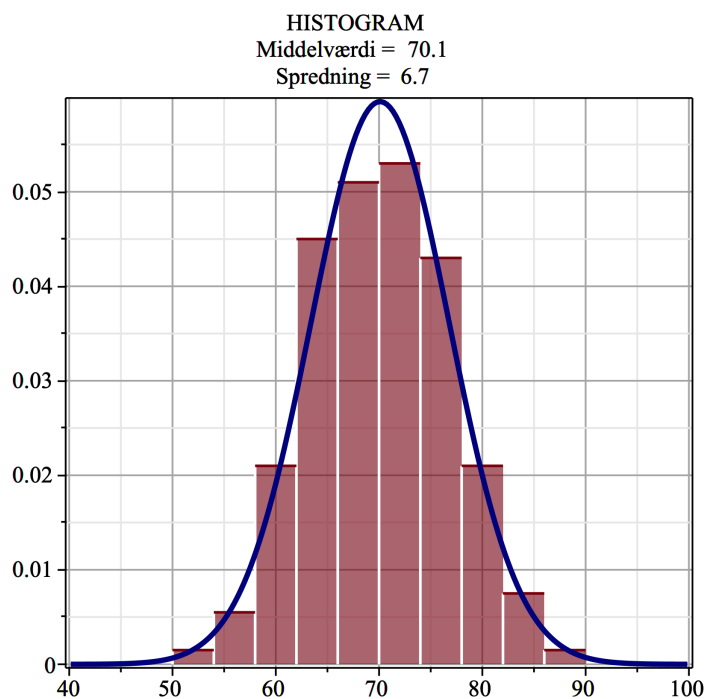
$\text{plotHistogram}(M)$



plotSumkurve (M)



Vi ser, at data har en klokkeform. Vi tegner en 'klokkekurve' ind sammen med histogrammet:



Den blå klokkekurve vil vi bruge som et idealiseret histogram. For at kunne gøre dette skal arealet mellem x -aksen og klokkekurven være præcis 1, svarende til at arealet af alle histogrammets søjler er 1.

Klokkekurven har denne forskrift (hvilket vi ikke vil komme nærmere ind på her – det må du vente med til A-niveau)

$$f(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} :$$

og grafen for denne med $\mu = 70.1$ og $\sigma = 6.7$ er præcis den blå kurve ovenfor. Denne funktion er i Gym-pakken under navnet

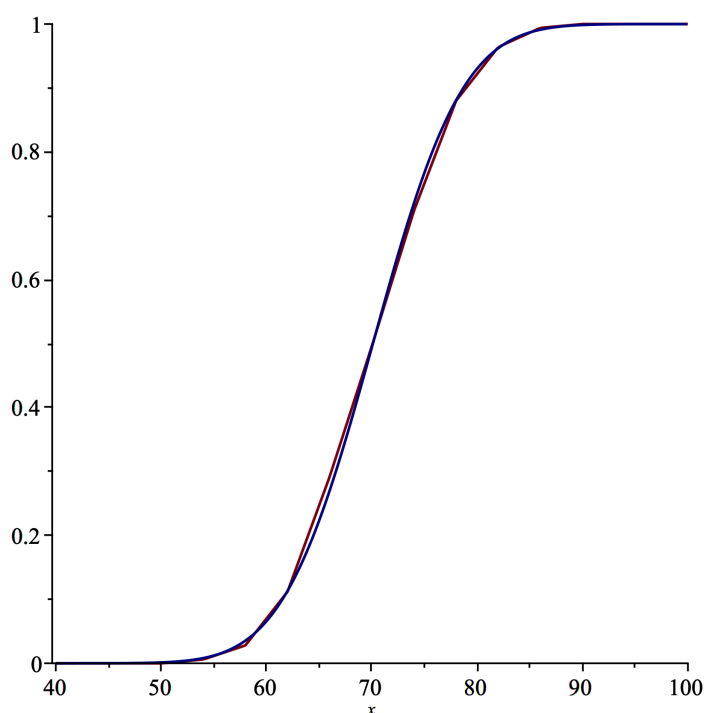
`normalpdf` (μ , σ , x)

Vi kan ved hjælp af funktionen f også bestemme en idealiseret udgave af sumkurven. Den idealiserede sumkurve hedder i Gym-pakken

`normalcdf` (μ , σ , x)

Grafen for denne, tegnet sammen med ovenstående sumkurve ser sådan ud:

`plot([sumkurve(M, x), normalcdf(70.1, 6.7, x)], x = 40 .. 100, color = ["Burgundy", "Navy"])`



Og som det ses, falder de to grafer stort set sammen.

16.3 Normalfordelt stokastisk variabel

Til vejning af en person (i den gruppe, hvor vi har data fra 500 vejninger) knytter vi en stokastisk variabel ved

X = vægten af en person fra gruppen

Undersøgelsen, vi lavede i sidste afsnit, kan vi formulere ved, at X er normalfordelt med middelværdi 70.1 og spredning 6.7, hvilket kort skrives som $X \sim N(70.1, 6.7)$.

Når X er normalfordelt med middelværdi 70.1 og spredning 6.7, kan vi udregne sandsynligheden for, at en person vejer mindre end x ved.

$P(X \leq x) = \text{normalcdf}(70.1, 6.7, x)$

Lad os udregne nogle sandsynligheder og sammenligne disse med de kumulerede frekvenser for vejningen af de 500 personer:

with(Gym) :

kumuleretFrekvens (M)

50	0
54.	0.00600
58.	0.02800
62.	0.11200
66.	0.29200
70.	0.49600
74.	0.70800
78.	0.88000
82.	0.96400
86.	0.99400
90.	1.00000

(16.2)

11 × 2 Matrix

Vi udregner først sandsynligheden for, at en person vejer mindre end eller lig med 50 kg, altså $P(X \leq 50)$:

normalcdf (70.1, 6.7, 50) = 0.0013498980

At vi ikke får 0 her, hænger sammen med, at selvom der blandt 500, der er vejlet, ikke er nogen, der vejer under 50 kg., så kan der jo godt være nogle i hele gruppen, men sandsynligheden er ganske lille.

Vi udregner dernæst sandsynligheden for, at en person vejer mindre end eller lig med 54 kg, 58 kg, 62 kg, osv.

normalcdf (70.1, 6.7, 54) = 0.0081309256

normalcdf (70.1, 6.7, 58) = 0.0354615012

normalcdf (70.1, 6.7, 62) = 0.1133400241

normalcdf (70.1, 6.7, 66) = 0.2702886291

normalcdf (70.1, 6.7, 70) = 0.4940458587

normalcdf (70.1, 6.7, 74) = 0.7197468188

normalcdf (70.1, 6.7, 78) = 0.8808217121

normalcdf (70.1, 6.7, 82) = 0.9621433806

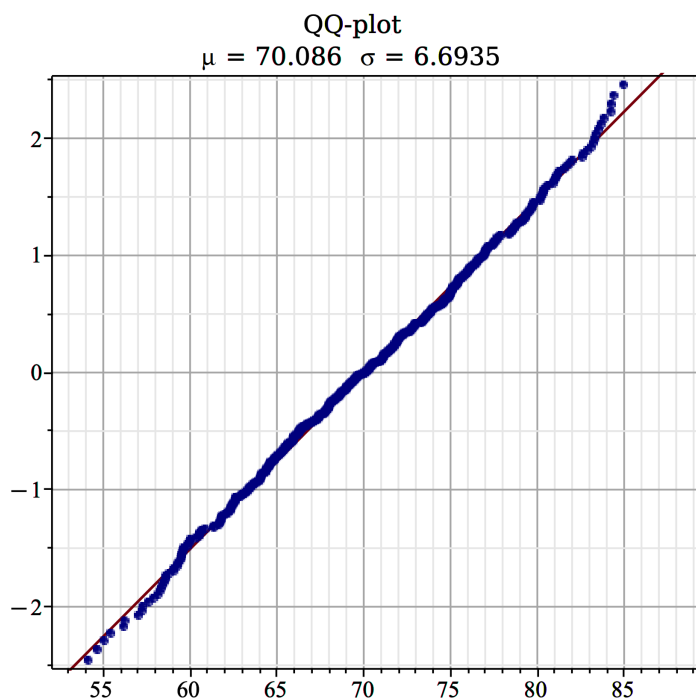
normalcdf (70.1, 6.7, 86) = 0.9911810760

normalcdf (70.1, 6.7, 90) = 0.9985117246

Specielt i midten passer det rigtig fint, men knap så godt i enderne, hvilket også er forventet.

Står vi med et datamateriale og skal undersøge, om det er normalfordelt, så går man ikke frem som ovenfor, men bruger forskellige grafiske metoder til visuelt at afgøre, om et datamateriale er normalfordelt. Den simpleste metode er at lave et såkaldt QQplot. Hvis data her ligger tilnærmelsesvist på en ret linje, så kan man antage at datamaterialet er normalfordelt:

QQplot(data)

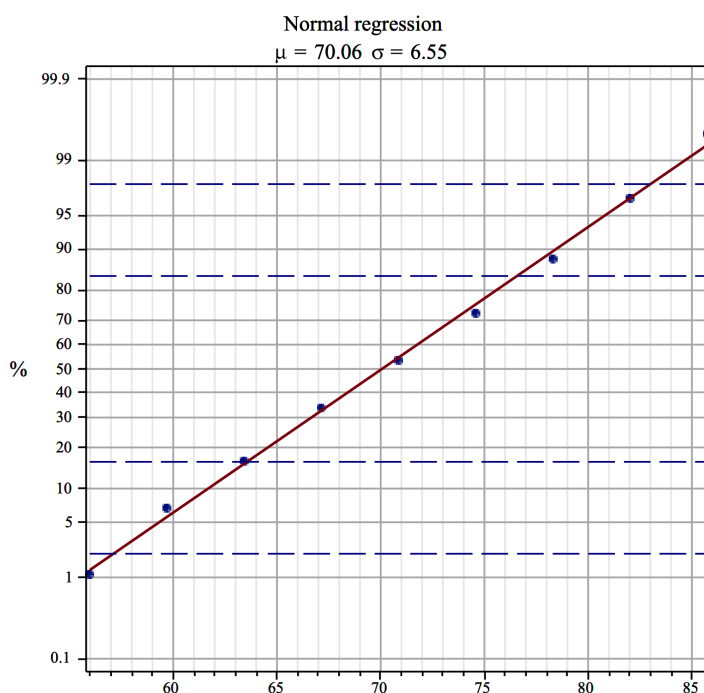


Og det ser jo rigtig fint ud – på trods af nogle afvigelser i begge ender.

Vi kan også bruge et sandsynlighedspapir, hvor datasættet først skal grupperes og derefter plottes i det specielle papir. Hvis de kumulerede intervalfrekvenser tilnærmelsesvist ligger på en ret linje, så kan vi antage, at data er normalfordelte.

Kommandoen *NormReg* grupperer automatisk data i 10 grupper og afsætter de kumulerede intervalfrekvenser i et sandsynlighedspapir. Derefter bestemmes den bedste rette linje gennem punkterne og på baggrund af denne estimeres middelværdi og spredning:

NormReg (data, procent)



Hvis punkterne tilnærmelsesvist ligger på en ret linje, så kan vi antage, at data er normalfordelte.

16.4 Eksempel

Hvis man vejer et stort antal poser med mel, har det vist sig, at vægten er normalfordelt med middelværdi $\mu = 500$ g og spredning $\sigma = 20$ g.

with (Gym) : 1. Hvor stor en del af poserne vejer højst 515 g? $normalcdf(500, 20, 515) = 0.7733726476$

Dvs., at 77.3% af poserne vejer højst 515 g.

2. Hvor stor en del af poserne vejer mindst 475 g?

$normalcdf(500, 20, 475) = 0.1056497738$

Altså vejer 10.6% af poserne højst 475 g. Dvs 89.4% vejer mindst 475 g.

Du kan naturligvis klare det i et hug ved at udregne

$1 - normalcdf(500, 20, 475) = 0.8943502262$

– eller endnu nemmere med 4-parameterversionen:

$normalcdf(500, 20, 475, \infty) = 0.8943502262$

3. Hvor stor en del af poserne vejer mellem 495 g og 505 g?

$normalcdf(500, 20, 505) - normalcdf(500, 20, 495) = 0.1974126512$

Altså 19.7% af poserne vejer mellem 495 g og 505 g.

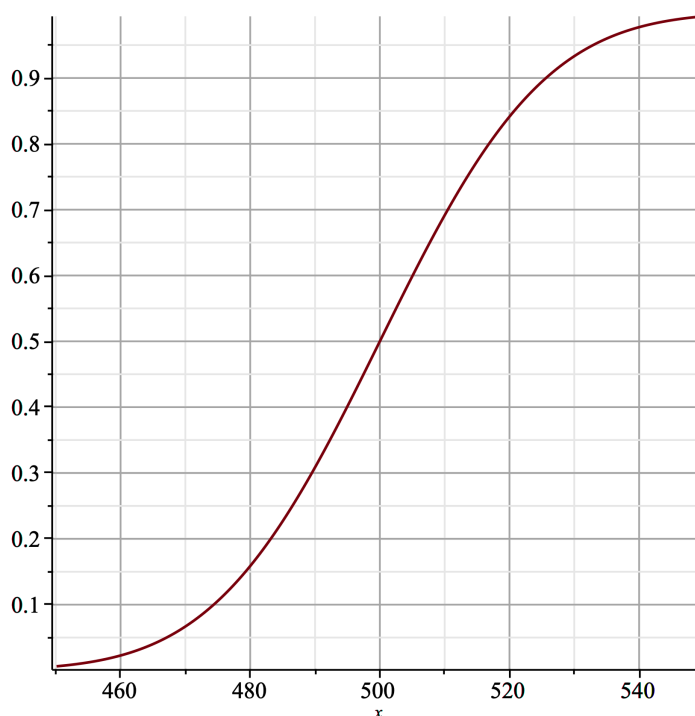
– her kan vi også benytte 4-parameterversionen:

$$\text{normalcdf}(500, 20, 495, 505) = 0.1974126513$$

4. Hvor meget vejer de tungeste 20% af poserne ?

Lad os først tegne grafen for $\text{normalcdf}(500, 20, x)$:

`plot(normalcdf(500, 20, x), x = 450 ..550, size = [400, 400])`



Ved aflæsning på grafen, kan vi se, at de 20% tungeste poser vejer mindst ca. 516 g.

For at beregne os frem til resultatet, skal vi løse ligningen

$$\text{normalcdf}(500, 20, x) = 0.8$$

Denne ligning kan være lidt drilsk at løse, men med *fsolve* udstyret med søgeinterval går det:

`fsolve(normalcdf(500, 20, x) = 0.8, x = 500 ..540)`

$$516.8324245$$

(16.3)

Det, vi finder her, kaldes 0.8-fraktilen. I Gym-pakken er der en funktion til bestemmelse af fraktiler i normalfordelingen

$$\text{invnorm}(500, 20, 0.8) = 516.832424671467$$

Og her går det helt problemfrit.

16.5 Normalapproximationen

Når antalsparameteren i en binomialfordeling bliver stor, bliver binomialfordelingen tung at arbejde med, idet binomialkoefficienterne $\text{binom}(n, r)$ vokser så voldsomt, at de fleste CAS værktøjer giver op. Så benyttes i stedet en approksimation med en normalfordeling.

Vi viser i et lille eksempel, hvordan det foregår:

Lad $X \sim \text{bi}(20, 0.5)$.

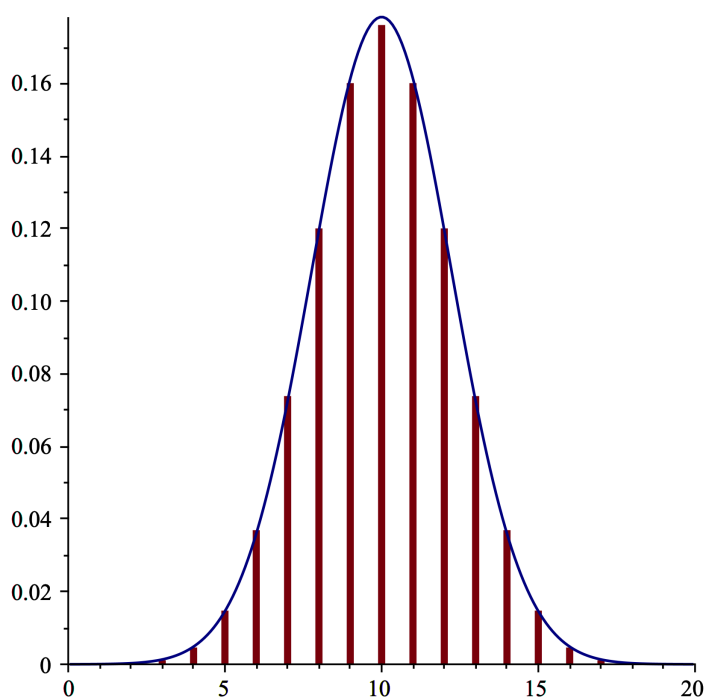
Middelværdien er $\mu = 20 \cdot 0.5 = 10$ og spredningen er $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = \sqrt{5}$.

Lad Y være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 10 og spredning $\sqrt{5}$ - dvs. $Y \sim N(10, \sqrt{5})$.

Vi tegner pindediagrammet for X sammen med tæthedsfunktionen (klokkkurven) for Y :

`with(Gym) :`

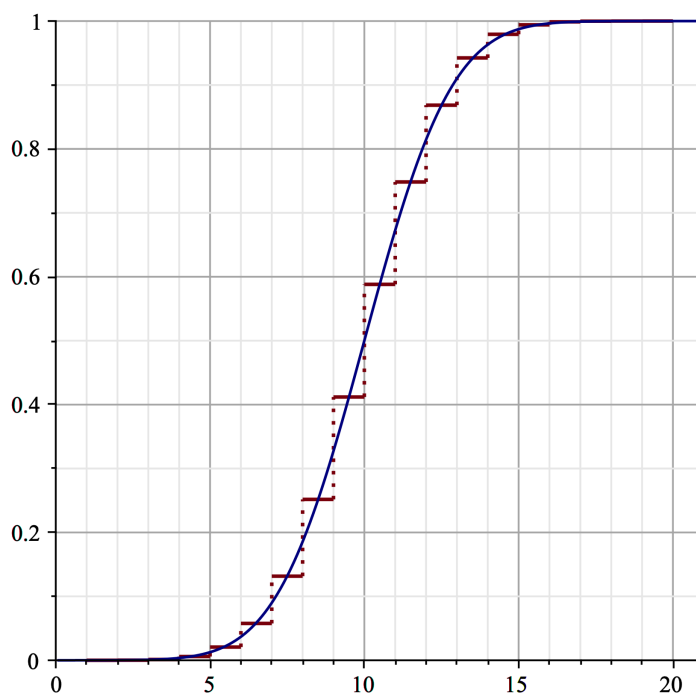
`plots[display]([pindediagramBIN(20, 0.5), plot(normalpdf(10, sqrt(5), x), x=0..20, color`



Det passer jo meget fint – og det selvom $n = 20$ ikke just er stor.

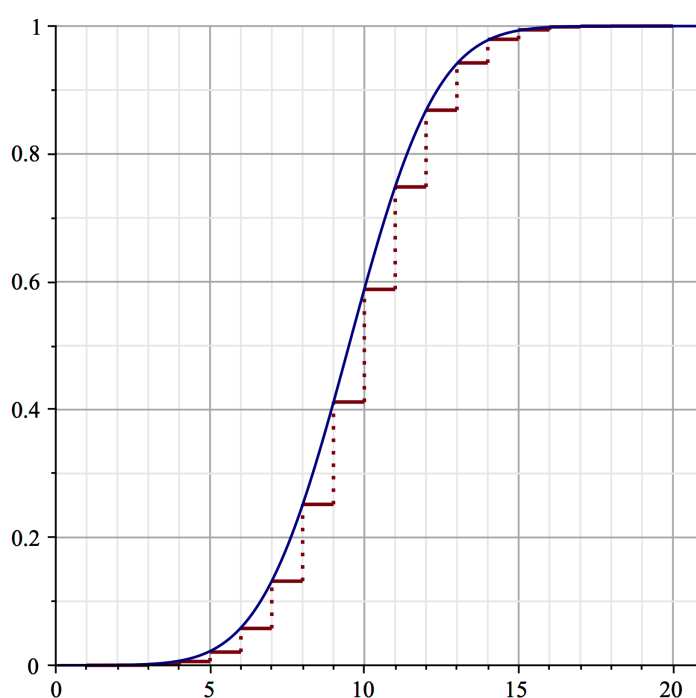
Lad os også tegne fordelingsfunktionerne for X og Y i samme koordinatsystem.

```
plots[display]([trappekurveBIN(20, 0.5), plot(normalcdf(10, sqrt(5), x), x = 0..21, color
```



Vi ser, at blå normalfordeling falder midt i trinnene i trappekurven. Forskyder vi normalfordelingen med $\frac{1}{2}$ til venstre vil værdierne i punkterne $0, 1, 2, \dots, 20$ passe nogenlunde:

```
plots[display]([trappekurveBIN(20, 0.5), plot(normalcdf(10, sqrt(5), x + 1/2), x = 0..21,
```



Vi har altså approksimationen:

$$P(X \leq x) \approx \text{normalcdf}\left(\mu, \sigma, x + \frac{1}{2}\right)$$

hvor $X \sim bi(n, p)$ og $Y \sim N(\mu, \sigma)$. μ og σ er middelværdien og spredningen i binomialfordelingen.